

Kombinatorika

Permutácie bez opakovania

Nech je daná n -prvková množina M s rôznymi prvkami. **Permutáciou** budeme rozumieť jedno z možných usporiadaní všetkých n prvkov množiny M .

Počet všetkých permutácií bez opakovania n -prvkovej množiny určíme podľa vzťahu : $P(n) = n!$

Príklady použitia:

- Koľko existuje 4-písmenových slov zložených z hlások A,F,E,L, ak každá hláska sa v slove vyskytne najviac raz.
- Koľkými spôsobmi môžu štyria ľudia nastúpiť do 4-miestneho auta.
- Koľkými spôsobmi môžeme na policičku vedľa seba uložiť 5 rôznofarebných hrnčekov.

Permutácie s opakovaním

Nech je daná n -prvková množina M , pričom niektoré prvky sa v množine môžu vyskytovať viac krát.

Permutáciou s opakovaním budeme rozumieť jedno z možných usporiadaní všetkých n prvkov množiny M .

Počet všetkých permutácií n -prvkovej množiny, pričom počet výskytov rovnakých prvkov je $n_1, n_2, \dots, n_k$

($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) určíme podľa vzťahu : $P(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

Príklady použitia:

- Koľko rôznych slov je možné vytvoriť zmenou poradia písmen v slove MATEMATIKA.
- Koľkými spôsobmi môžeme na policičku vedľa seba uložiť 6 hrnčekov, z ktorých sú 3 biele, 2 modré a jeden červený .

Variácie bez opakovania

Nech je daná n -prvková množina M . **Variáciou** k -tej triedy z n prvkov budeme rozumieť usporiadanú k -ticu prvkov množiny M , pričom tieto prvky sa neopakujú.

Počet všetkých variácií bez opakovania k -tej triedy z n -prvkov určíme podľa vzťahu

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!} = n!(n-k)! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Príklady použitia:

- Koľko existuje 3-písmenových slov zložených z hlások A,F,E,L,O ak každá hláska sa v slove vyskytne najviac raz.
- Koľkými spôsobmi sa môžu štyria ľudia usadiť do radu v kine, v ktorom je 10 miest.
- Koľkými spôsobmi môžeme na policičku vedľa seba uložiť 3 zo 6 rôznofarebných hrnčekov.

Variácie s opakovaním

Nech je daná n -prvková množina M . **Variáciou s opakovaním** k -tej triedy z n prvkov budeme rozumieť usporiadanú k -ticu prvkov množiny M , pričom tieto prvky sa v k -tici môžu vyskytovať viackrát.

Počet všetkých variácií s opakovaním k -tej triedy z n -prvkov určíme podľa vzťahu : $V^0(k,n) = n^k$

Príklady použitia:

- Koľko existuje 3-písmenových slov zložených z hlások A,F,E,L,O ak v slove sa môžu hlásky opakovať
- Koľko rôznych možností môže nastať pri hode tromi rôznymi kockami.
- Koľkými spôsobmi môžeme ofarbiť hrany 6-uholníka, ak mám k dispozícii 10 farieb

Kombinácie bez opakovania

Nech je daná n -prvková množina M . **Kombináciou** k -tej triedy z n prvkov budeme rozumieť k -prvkovú podmnožinu množiny M . (prvky sú rôzne, na poradí prvkov nezáleží)

Počet všetkých kombinácií bez opakovania k -tej triedy z n -prvkov určíme podľa vzťahu :

$$C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{V(k,n)}{k!}$$

Príklady použitia:

- Koľko existuje 3-prvkových podmnožín vytvorených z 8-prvkovej množiny.
- Koľkými spôsobmi si môžeme vybrať 3 výrobky z desiatich, ktoré sú v ponuke.
- Koľko existuje možností na vyplnenie tiketu lota, ak vyplňame 6 čísel z 49 možných.

Kombinačné čísla

Číslo $\binom{n}{k}$ nazývame **kombinačné číslo**, určuje počet k -prvkových podmnožín vytvorených z n -prvkovej množiny.

Vlastnosti kombinačných čísel :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Pascalov trojuholník

$n=0$										$\binom{0}{0}$									
$n=1$										$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$							
$n=2$										$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$					
$n=3$										$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$			
$n=4$										$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	
$n=5$										$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$	

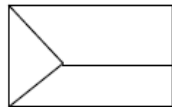
																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Počet všetkých podmnožín n -prvkovej množiny je $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

Príklady na precvičenie:

1. Koľko rôznych slov je možné vytvoriť zmenou poradia písmen v slove FLORIDA?

- a) Koľko z nich bude končiť samohláskou?
- b) Koľko z nich bude začínať aj končiť spoluhláskou?
- c) Koľko z nich bude takých, že v slove budú najskôr všetky spoluhlásky, potom všetky samohlásky?
- d) Koľko z nich bude začínať na písmeno R?
- e) Koľko slov bude takých, že písmena DA budú pri sebe a budú v tomto poradí?

2. Koľko rôznych slov je možné vytvoriť zmenou poradia písmen v slove HONOLULU?
- Koľko z nich bude takých, že v slove budú najskôr všetky spoluhlásky, potom všetky samohlásky?
 - Koľko z nich bude začínať na písmeno H?
 - Koľko slov bude takých, že písmena LL budú pri sebe?
3. Koľko 5-ciferných čísel je možné vytvoriť z cifier 0, 1, 2, 3, 4, ak
- sa cifry v čísle neopakujú ?
 - sa cifry v čísle neopakujú a číslo je párne?
 - sa cifry v čísle neopakujú a číslo je deliteľné piatimi?
 - sa cifry v čísle môžu opakovať?
 - sa cifry v čísle môžu opakovať a číslo je párne?
 - sa cifry v čísle môžu opakovať a číslo je deliteľné piatimi?
 - cifry sa môžu opakovať a číslo je väčšie ako 20000?
4. V obchode je 6 zákazníkov (A, B, C, D, E, F). Koľko existuje možností, ako sa môžu postaviť do radu pri pokladni?
- koľko je takých, že A je v rade prvý?
 - koľko je takých, že CD stoja hneď za sebou, ale nevieme kto z nich je prvý?
 - koľko je takých, že A je v prvej polovici radu a F je v druhej polovici radu?
5. V štvorci ABCD vyfarbite každú stranu inou farbou. Koľko existuje rôznych ofarbení štvorca, ak máte k dispozícii 6 rôznych farieb ?
6. K dispozícii máme bielu, červenú, žltú, sivú, zelenú a modrú látku. Koľko rôznych vlajok môžeme zhotoviť
- ak každá farba môže byť použitá len raz ?
 - ak každá farba môže byť použitá len raz a cíp má byť modrej farby ?
 - ak každá farba môže byť použitá len raz cíp nesmie byť ani bielej ani žltej farby?
- 
7. Koľko existuje 3-ciferných čísel s rôznymi ciframi, ktoré sú
- párne
 - nepárne
 - deliteľné číslom 10
8. Určte koľko rôznych obrázkov sa dá nakresliť na plátne 100 x 100 pixelov, ak môžeme použiť iba dve farby.
9. Koľko rôznych mobilných telefónnych čísel môže existovať pre predvoľbu 0 987? Koľko z nich je takých, že
- posledné šesťčísle obsahujú iba párne číslice?
 - posledné šesťčísle má párne číslice na párnych a nepárne číslice na nepárnych pozíciách?
 - celé číslo má navzájom rôzne číslice?
10. Koľkými spôsobmi možno zo sady 12 rôznofarebných farbičiek, medzi ktorými je čierna aj biela farbička vybrať tri farbičky tak, aby
- jedna z nich bola čierna?
 - ani jedna farbička nebola biela?
 - jedna farbička bola čierna a žiadna nebola biela?
11. Vrote je 5 dôstojníkov a 50 vojakov. Koľkými spôsobmi možno zostaviť službu, ktorá pozostáva
- z jedného dôstojníka a troch vojakov?
 - z dvoch dôstojníkov a piatich vojakov ?

12. V triede je 10 chlapcov a 20 dievčat. Koľko existuje možností na vytvorenie
- 4-členného triedneho výboru?
 - 4-členného triedneho výboru pozostávajúceho z predsedu a troch členov?
 - 4-členného výboru, v ktorom budú dvaja chlapci a dve dievčatá?
 - 4-členného výboru, v ktorom budú najviac dvaja chlapci?
 - 4-členného výboru, v ktorom bude aspoň jeden chlapec a súčasne aspoň jedno dievča?
 - 4-členného výboru pozostávajúceho z predsedu – chlapca a troch členov?
13. Šesť spolužiačok sa dohodlo, že z prázdnin si navzájom každá každej pošlú pohľadnicu. Koľko pohľadníc si celkovo navzájom poslali?
14. Pri stretnutí si priatelia podali každý s každým raz ruku. Počet všetkých podaní rúk bol 78. Koľko priateľov sa stretlo?
15. Z balíčka sedmových kariet si vyberieme 4 karty. Koľko existuje možností, aby sme vo výbere mali
- práve jedno eso
 - aspoň jedno eso
 - všetky 4 esá
 - práve jednu červeňovú kartu
 - aspoň jednu červeňovú kartu
 - všetky 4 červeňové karty
 - červeňové eso
 - práve jedno eso a jednu červeňovú kartu
 - dve červeňové karty a dve zeleňové karty
 - práve jedno eso a jedného kráľa
16. V obchode majú hrnčeky v týchto farbách : biela, ružová, žltá, oranžová, červená, modrá, fialová, zelená a sivá. Iveta si chce kúpiť 4 rôznofarebné hrnčeky. Koľko možností nákupu má,
- Ak chce mať určite žltý hrnček?
 - Ak nechce kúpiť ani sivý ani biely hrnček
 - Ak sa chce vyhnúť kombinácii modrej a zelenej
17. Na kružnici je umiestnených 9 rôznych bodov. Koľko existuje trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia v týchto bodoch?
18. Dané sú dve rovnobežné priamky p , q . Na priamke p leží 8 rôznych bodov $P_1, P_2, \dots, P_8$. Na priamke q leží 10 rôznych bodov $Q_1, Q_2, \dots, Q_{10}$. Určte koľko rôznych trojuholníkov s vrcholmi v daných bodoch je možné vytvoriť?
19. Upravte výrazy
- $\frac{n}{n^2-1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-2)!} =$
 - $\frac{(n+1)! - n \cdot n!}{(n-1)!} =$
 - $\frac{2}{(n-1)!} - \frac{2n^2+n}{(n+1)!} =$
20. Riešte rovnicu
- $\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{2} = 9$
 - $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{n-4} = 4 \cdot \binom{n}{0}$
 - $\frac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16x = 28$