

## Absolútna hodnota

Absolútnu hodnotu reálneho čísla  $a$  označujeme  $|a|$ .

**Definícia:**  $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

**Napríklad:**  $|6| = 6$      $|-3,1| = 3,1$      $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

Absolútnou hodnotou reálneho nezáporného čísla je to isté reálne číslo. Absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné.

### Vlastnosti absolútnej hodnoty

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  platí:  $|a| \geq 0$  (Absolútna hodnota reálneho čísla je vždy číslo nezáporne.)

$$|-a| = |a| \qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ pre } b \neq 0 \qquad |a + b| \leq |a| + |b|$$

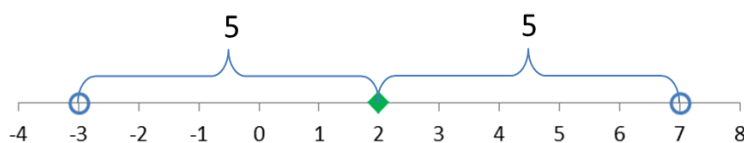
### Geometrický význam absolútnej hodnoty

Absolútnou hodnotou reálneho čísla  $a$  rozumieme vzdialenosť obrazu čísla  $a$  na číselnej osi od začiatku číselnej osi.

Hodnota  $|a - b|$  určuje vzdialenosť obrazov dvoch reálnych čísel  $a, b$  na číselnej osi a to bez ohľadu na to, či  $a > b$  alebo  $b > a$ .

**Príklad 1.** Riešte v  $\mathbb{R}$ :  $|x - 2| = 5$

**Riešenie:** 1. spôsob Vychádzame z geometrického významu absolútnej hodnoty, tak hľadáme také číslo  $x$ , ktorého obraz na číselnej osi je od obrazu čísla 2 vzdialený 5 jednotiek.



$$K = \{-3; 7\}$$

**Poznámka:** Ak danú situáciu zovšeobecníme, tak riešiť rovnicu v tvare  $|x - a| = b$ ;  $b \in \mathbb{R}_0^+$  znamená nájsť také číslo  $x$ , kt. obraz na číselnej osi je od obrazu čísla  $a$  vzdialený  $b$  jednotiek.

Pre nerovnicu v tvare  $|x - a| > b$ ;  $b \in \mathbb{R}_0^+$  budeme hľadať také číslo  $x$ , ktorého obraz na číselnej osi leží od obrazu čísla  $a$  vo vzdialenosti väčšej ako  $b$  jednotiek.

Pre nerovnicu v tvare  $|x - a| < b$ ;  $b \in \mathbb{R}_0^+$  budeme hľadať také číslo  $x$ , ktorého obraz na číselnej osi leží od obrazu čísla  $a$  vo vzdialenosti menšej ako  $b$  jednotiek.

## 2. spôsob

Vychádzame z definície absolútnej hodnoty, úloha sa rozdelí na dve časti.

V prvej časti budeme riešiť rovnicu pre prípad, že výraz  $x - 2$  nadobúda nezáporné hodnoty, v druhej časti pre prípad, že výraz  $x - 2$  nadobúda záporné hodnoty.

$$\text{I. } (x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2) \Rightarrow |x - 2| = x - 2$$

rovnica po odstránení absolútnej hodnoty má tvar  $x - 2 = 5$

a jej riešením je  $x = 7$ . Ešte je nutné overiť, či získané riešenie je z intervalu, na ktorom sme danú rovnicu riešili. V tomto prípade je to splnené.

$$\text{II. } (x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2) \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

rovnica po odstránení absolútnej hodnoty má tvar  $-x + 2 = 5$

a jej riešením je  $x = -3$ . Aj v tomto prípade platí, že získané riešenie je z intervalu, na ktorom bola rovnica riešená.

Záver: Riešením rovnice je zjednotenie riešení z oboch častí, teda  $K = \{-3; 7\}$ .

## 3. spôsob

Na oboch stranách rovnice sú nezáporné výrazy, preto môžeme celú rovnicu umocniť, po umocnení získavame kvadratickú rovnicu, ktorú je môžeme riešiť pomocou diskriminantu, alebo vhodnými úpravami na súčinový tvar.

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 5 & /(\quad)^2 \\ (x - 2)^2 &= 5^2 \\ (x - 2)^2 - 5^2 &= 0 \\ (x - 2 - 5)(x - 2 + 5) &= 0 \\ (x - 7)(x + 3) &= 0 \\ x_1 &= 7 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$K = \{-3; 7\}$$

## **Rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou**

Sú to také rovnice (nerovnice), v ktorých neznáma, resp. výraz, ktorý neznámu obsahuje sa nachádza v absolútnej hodnote.

Riešiť rovnice (nerovnice) s absolútnymi hodnotami znamená upraviť rovnicu (nerovnicu) na tvar, ktorý už nebude obsahovať výrazy s absolútnymi hodnotami.

Ak riešime rovnicu (nerovnicu) s jednou absolútnou hodnotou, tak v prvom kroku riešenia odstránime na základe definície absolútnu hodnotu z rovnice (nerovnice). Riešenie úlohy sa rozdelí na dve časti.

V niektorých prípadoch je možné riešiť rovnicu s absolútnou hodnotou tak, že obe strany rovnice umocníme. Keďže umocňovanie je neekvivalentnou úpravou, súčasťou riešenia úlohy musí byť aj skúška.

Efektívnym spôsobom riešenia rovnice (nerovnice) s viacerými absolútnymi hodnotami je použiť metódu **nulových bodov**. Nulovým bodom budeme rozumieť také číslo, pre ktoré je výraz v absolútnej hodnote rovný nule. Množinu reálnych čísel rozdelíme na základe nulových bodov na niekoľko intervalov. Na každom z týchto intervalov vieme každý výraz s absolútnou hodnotou zapísať bez absolútnej hodnoty, tým upravíme pôvodnú rovnicu (nerovnicu) na tvar bez absolútnych hodnôt a riešime ju na príslušnom intervale.

**Príklad 2.** Riešte v  $\mathbb{R}$ :  $|x+1| + 2 \cdot |6-x| = 10$

Riešenie: Využijeme metódu nulových bodov. Nulové body sú čísla, pre ktoré výrazy v absolútnych hodnotách majú hodnotu rovnú nule. V našom prípade nulové body získame vyriešením rovníc  $x+1=0$  a  $6-x=0$ .

Nulové body : -1; 6

Množinu reálnych čísel rozdelíme pomocou nulových bodov na tri intervaly a na každom z budeme riešiť príslušnú rovnicu bez absolútnych hodnôt. Riešenie prehľadne zapíšeme do tabuľky.

|                              | $I_1$<br>$x \in (-\infty; -1)$                                                                             | $I_2$<br>$x \in (-1; 6)$                                      | $I_3$<br>$x \in (6; \infty)$                                   |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $x+1$                        | -                                                                                                          | +                                                             | +                                                              |
| $ x+1 $                      | $-x-1$                                                                                                     | $x+1$                                                         | $x+1$                                                          |
| $6-x$                        | +                                                                                                          | +                                                             | -                                                              |
| $ 6-x $                      | $6-x$                                                                                                      | $6-x$                                                         | $-6+x$                                                         |
| $ x+1  + 2 \cdot  6-x  = 10$ | $-x-1 + 2(6-x) = 10$<br>$-3x + 11 = 10$<br>$-3x = -1$<br>$x = \frac{1}{3}$<br>$x = \frac{1}{3} \notin I_1$ | $x+1 + 2(6-x) = 10$<br>$-x + 13 = 10$<br>$-x = -3$<br>$x = 3$ | $x+1 + 2(-6+x) = 10$<br>$3x - 11 = 10$<br>$3x = 21$<br>$x = 7$ |
| $K$                          | $K_1 = \emptyset$                                                                                          | $K_2 = \{3\}$                                                 | $K_3 = \{7\}$                                                  |

Množina koreňov rovnice je  $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{3; 7\}$ .

Pre domáce štúdium a overenie výsledkov odporúčame stránku [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)

Do vstupného poľa stačí zadať rovnicu zapísanú v správnom tvare, v tomto prípade zápis:  
**abs(x+1)+2abs(6-x)=10** Aplikácia poskytne výsledky a grafické riešenie príslušnej rovnice.

**Príklad 4.** Riešte v  $\mathbb{R}$ :  $|x+1| + 2 \cdot |6-x| \geq 10$

**Riešenie** Pri riešení nerovnice taktiež môžeme využiť metódu nulových bodov. Rovnako ako v predchádzajúcom príklade budú nulové body -1; 6, stredná časť tabuľky bude rovnaká, v tomto prípade riešime nerovnice na príslušných intervaloch.

|                                 | $I_1$<br>$x \in (-\infty; -1\rangle$                                                                                                  | $I_2$<br>$x \in \langle -1; 6\rangle$                                                               | $I_3$<br>$x \in \langle 6; \infty)$                                                                  |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x+1$                           | -                                                                                                                                     | +                                                                                                   | +                                                                                                    |
| $ x+1 $                         | $-x-1$                                                                                                                                | $x+1$                                                                                               | $x+1$                                                                                                |
| $6-x$                           | +                                                                                                                                     | +                                                                                                   | -                                                                                                    |
| $ 6-x $                         | $6-x$                                                                                                                                 | $6-x$                                                                                               | $-6+x$                                                                                               |
| $ x+1  + 2 \cdot  6-x  \geq 10$ | $-x-1+2(6-x) \geq 10$<br>$-3x+11 \geq 10$<br>$-3x \geq -1$<br>$x \leq \frac{1}{3}$<br>$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle$ | $x+1+2(6-x) \geq 10$<br>$-x+13 \geq 10$<br>$-x \geq -3$<br>$x \leq 3$<br>$x \in (-\infty; 3\rangle$ | $x+1+2(-6+x) \geq 10$<br>$3x-11 \geq 10$<br>$3x \geq 21$<br>$x \geq 7$<br>$x \in \langle 7; \infty)$ |
| $K$                             | $K_1 = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cap I_1$<br>$K_1 = (-\infty; -1\rangle$                                               | $K_2 = (-\infty; -3\rangle \cap I_2$<br>$K_2 = \langle -1; 3\rangle$                                | $K_3 = \langle 7; \infty) \cap I_3$<br>$K_3 = \langle 7; \infty)$                                    |

Množina koreňov nerovnice je zjednotením intervalov  $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ .  $K = (-\infty; 3\rangle \cup \langle 7; \infty)$