Exponenciálna funkcia , exponenciálne rovnice, nerovnice, aplikácie

1. Rozhodnite o pravdivosti výrokov

   a) Ak $a \in (0;1)$, tak $a^{-2} > a^{-3}$

   b) Ak platí $a^{-0,7} > a^{-0,5}$, tak $a \in (1;\infty)$

   c) Ak $0,3^{r} > 0,3^{s}$, tak $r < s$

   d) $\left(\sqrt{5}-1\right)^{\sqrt{2}} < \left(\sqrt{5}-1\right)^{\sqrt{3}}$

2. Načrtnite graf funkcie

   $f_1 : y = 3^{x-2}$ $\qquad f_2 : y = -3^{x}$ $\qquad f_3 : y = 3^{-x}$ $\qquad f_4 : y = 3^{x} - 2$

3. Riešte v R (ĽS, PS na rovnaký základ)

   a) $49^{2x-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+1}$

   b) $\left(0,1^{x-1}\right)^{3} = 10^{1-x}$

   c) $7^{1-x} \cdot 4^{1-x} = \frac{1}{28}$

   d) $2^{x} \cdot 4^{x} = 8\sqrt{2}$

   e) $25^{x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$

   f) $5^{x(x+1)} = 0,04^{=28}$

   g) $4^{x} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^{1+x} = 1024$

   h) $2^{x-2} \cdot 72 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

   i) $5^{x^2 - \frac{11}{2}x + 3} = \sqrt{5}$

---

4. Riešte v R (úpravy začať vynímaním pred zátvorku, potom upraviť ĽS, PS na rovnaký základ)

   a) $2^{x+2} - 2^{x} = 96$

   b) $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$

   c) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$

   d) $3 \cdot 2^{2x+3} - \frac{9^{x+1}}{3^{-1}} = 3 \cdot 4^{x} + \frac{9}{2 \cdot 9^{-x}}$

5. Riešte v R (použitie substitúcie, úlohy vedú na riešenie kvadratickej rovnice)

   a) $25^{2x} - 6 \cdot 25^{x} + 5 = 0$

   b) $6 \cdot 2^{x} = 4^{x} - 16$

   c) $4^{x} - 3 \cdot 2^{x} = 4$

   d) $2^{x} + 2^{-x+1} - 3 = 0$

   e) $3 \cdot 8^{x} - 5 = 2 \cdot 8^{-x} = 0$

6. Riešte v R

   a) $8^{4x-1} \leq \frac{1}{2}$

   b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$

   c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} < \left(\frac{1}{27}\right)^{x+2}$

   d) $6^{4x+1} - 6 > 1290$

   e) $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} \leq 64^{-1}$

   f) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3x^2-1}{2}} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{x^2+1}{3}}$

7. Počet baktérií n_t v skúmavke po t minútach pokusu je určený vzťahom $n_t = n_0 \cdot k^{t}$, kde konštanta $k \in R^{+}$. Na začiatku pokusu bolo v skúmavke 320 baktérií, po troch minútach bolo v skúmavke 5000 baktérií.

   a) Po koľkých minútach pokusu bude v skúmavke 12500 baktérií?
   b) Koľko baktérií bude v skúmavke po 30 sekundách od začiatku pokusu?
   c) Koľko baktérií bolo v skúmavke minútu pred začiatkom pokusu?

Výsledky:

3. a) 1/7 b) 1 c) 2 d) 7/6 e) -2; 0 f) -7; 8 g) -4 h) -1 i) ½; 5

4. a) 5 b) 3 c) 3 d) -½

5. a) 0; 1 b) 3 c) 2 d) 0; 1 e) 1/3

6. a) $\left(-\infty;\ \frac{1}{6}\right\rangle$ b) $\langle 0;\infty)$ c) $(12;\infty)$ d) $\left(\frac{3}{4};\infty\right)$ e) $(-\infty;\ -2\rangle \cup \langle 4;\infty)$ f) $(-\infty;\ -1\rangle \cup \langle 1;\infty)$

7. a) 4 b) 506 c) 128

Riešený príklad 1.:

$$2^{2x}\cdot 5^x - 2^{2x-1}\cdot 5^{x+1} = -600$$
$$2^{2x}\cdot 5^x - 2^{-1}\cdot 2^{2x}\cdot 5\cdot 5^x = -600$$
$$4^x\cdot 5^x - \frac{5}{2}\cdot 4^x\cdot 5^x = -600$$
$$20^x - \frac{5}{2}\cdot 20^x = -600$$
$$20^x\left(1-\frac{5}{2}\right) = -600$$
$$20^x\cdot\frac{-3}{2} = -600 \quad /\cdot\frac{-2}{3}$$
$$20^x = 400$$
$$20^x = 20^2$$
$$x = 2 \qquad K=\{2\}$$

Riešený príklad 2.:

$$3^{x+1}+3^{-x} = 4$$
$$3\cdot 3^x + 3^{-x} = 4$$
$$sub.\ \ 3^x = y$$

$$3y + y^{-1} = 4$$
$$3y + \frac{1}{y} = 4 \quad /\cdot y$$
$$3y^2 + 1 = 4y$$
$$3y^2 - 4y + 1 = 0$$

Riešením tejto KR sú čísla $y_1 = 1;\ y_2 = \frac{1}{3}$. Dosadením týchto hodnôt do substitúcie získavame dve jednoduché exponenciálne rovnice :

$$3^x = 1 \qquad 3^x = \frac{1}{3}$$
$$3^x = 3^0 \qquad 3^x = 3^{-1}$$
$$x = 0 \qquad x = -1$$
$$K = \{-1; 0\}$$