Príprava na 2. školskú úlohu

1. Riešte v R rovnice s neznámou x a parametrom **m**

a) $x^2+4x-10+m=0$ b) $x^2-2(m+4)x+m^2+6m=0$

c) $x^2-x-mx+1=0$ d) $mx^2-2mx-3=0$

2. Určte parameter **m**, tak aby kvadratická rovnica mala práve jedno riešenie

a) $x^2+3mx+1+2m^2=0$ /m=±2/ b) $mx^2-8x+m=0$ /m=±4; pre m=0 nie je KR/

c) $(m^2-1)x^2+2mx+1=0$ /m∈R-{±1}/ d) $x^2-mx+5=m-2x$ /m=±4/

3. Načrtnite graf funkcie, určte D(f), H(f)

$f_1: y=(x+3)^5-2$ $f_2: y=(x-2)^{-6}+1$ $f_3: y=-(x+1)^4$ $f_4: y=\left|(x-1)^{-3}-2\right|$

$f_5: y=-1+\dfrac{1}{(x+3)^5}$ $f_6: y=\dfrac{x^3\cdot(-x)^5}{x^{-2}}$ $f_7: y=\sqrt{x^4\cdot x^{-2}}$ $f_8: y=(\sqrt{x})^6\cdot(1-x^{-1})^3$

4. Zjednodušte výrazy

a) $\sqrt{\left(\dfrac{a^2\cdot\sqrt{a}}{a^6\cdot\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}:\left(a\cdot\sqrt{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}}{a^3}}\right)^{-1}=$ b) $\dfrac{\sqrt{u\cdot\sqrt{uv}}}{u\cdot\sqrt{v}}\cdot\dfrac{u^2\cdot\sqrt{uv}}{\sqrt[4]{uv^2}}=$ c) $\sqrt{\dfrac{x^3\cdot\sqrt{xy}}{y\cdot\sqrt{xy^3}}}:\sqrt{\dfrac{x\cdot\sqrt{x}}{y\cdot\sqrt{y}}}=$

d) $\left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-(ab)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-a}{b^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{a+b}{(ab)^{\frac{1}{2}}}=$ e) $\dfrac{m^{-0,5}+1}{m^{-0,5}-1}+\dfrac{1-m^{-0,5}}{m^{-0,5}+1}=$ f) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}=$

5. Využitím vlastnosti vhodnej mocninovej funkcie usporiadate čísla podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie

a) $(1{,}5)^{-6}$; $(0{,}25)^3$; 3^0; $(-0{,}2)^{-3}$; -1

b) 3^{-4}; $(1{,}7)^{-8}$; $(-3{,}1)^{-4}$; 4^{-2}; 8^{-1}; $(0{,}3)^2$

6. Riešte v R

a) $\sqrt{2x-1}=3$ K={5} b) $\sqrt{x+5}=-1$ K=∅

c) $\sqrt{4-x}=\sqrt{x+2}$ K={1} d) $\sqrt{2x-5}=\sqrt{1-x}$ K=∅

e) $\sqrt{12-x}=x$ K={3} f) $\sqrt{x-2}=x-4$ K={6}

g) $\sqrt{7-x}=1-x$ K={-2} h) $2\sqrt{x+5}=x+2$ K={4}

i) $\sqrt{25-x^2}=x+1$ K={3} j) $\sqrt{5x+x^2}=2-2x$ K={1/3}

k) $\sqrt{2x^2-1}=x+2$ K={-1; 5} l) $\sqrt{10+x-x^2}=x-1$ K={3}

7. Riešte v R

a) $\sqrt{7-2\sqrt{x+3}}=\sqrt{18-13\sqrt{x+3}}$ K={-2} b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$ K={-1; 2}

c) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x+4}$ K={0,5; 5} d) $\sqrt{x+7}=2+\sqrt{13-x}$ K={9}

e) $\sqrt{x+36}=18-\sqrt{x}$ K={64} f) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$ K={-1; 15}

g) $\sqrt{9x^2+4\sqrt{6x+2}}=3x+2$ K={ ±1/3} h) $\sqrt{x+9}=1-\sqrt{x+2}$ K=∅

i) $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+2}=\sqrt{-x}$ K={-0,2; -1} j) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$ K={-1}

8. Určte hodnotu $a\in R$ a načrtnite funkciu $f: x^3+3x^2-ax-12$, ak $f(-1)=-6$.

9. Načrtnite graf funkcie, určte všetky hodnoty x, pre ktoré platí $f(x)>0$.

$f_1: y=10x+3x^2-x^3$ $f_2: y=x^4-5x^2+4$ $f_3: y=x^4-6x^3+9x^2$ $f_4: y=x^3-6x^2+9x$

10. Načrtnite graf funkcie, určte D(f), H(f) a priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami

$f_1: y=\frac{x+3}{x-1}$ $f_2: y=\frac{2x+3}{x-1}$ $f_3: y=\frac{x+3}{x+5}$ $f_4: y=\frac{3x+1}{x+1}$

$f_5: y=\frac{2x-1}{1-x}$ $f_6: y=\frac{2-x}{x+2}$ $f_7: y=\frac{x+3}{2x-1}$ $f_8: y=\frac{3x+5}{1-2x}$

$f_9: y=\left|\frac{x+2}{x}\right|$ $f_{10}: y=1+\left|\frac{2}{x+3}\right|$

11. Určte predpis lineárnej lomenej funkcie, ktorá prechádza bodom

a) A=[1; -2] a má D(f) = R–{2} ; H(f) = R–{1} b) B=[-2; 4] a má D(f) = R–{-4} ; H(f) = R–{-3}

c) C=[4; -1] a má D(f) = R–{3} ; H(f) = R–{1}

4. úloha .... výsledky

a) a^6 b) $u^2\cdot v^{-\frac{1}{4}}$ c) $x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{4}}$ d) $1-\sqrt{a}$ e) $\frac{4\sqrt{m}}{1-m}$ f) $\frac{x+y}{x-y}$

11. úloha ... výsledky

a) $f: y=\frac{x+1}{x-2}$ b) $f: y=\frac{-3x+2}{x+4}$ c) $f: y=\frac{x-5}{x-3}$

Riešené úlohy

1. Riešte v R rovnicu $mx^2 + mx + 9 = 4x^2 - 4x$ **s parametrom m**

Riešenie:

Rovnicu prevedieme do základného tvaru, určíme koeficienty A, B, C.

$$mx^2 + mx + 9 = 4x^2 - 4x$$
$$mx^2 - 4x^2 + mx + 4x + 9 = 0$$
$$(m-4)x^2 + (m+4)x + 9 = 0$$

A = m-4 B = m+4 C = 9

I. Ak koeficient **A=0**, teda v našom prípade **m=4**, rovnica nie je kvadratická, ale lineárna

$$4x^2 + 4x + 9 = 4x^2 - 4x$$
$$8x = 9$$
$$x = \frac{9}{8}$$

II. Ak koeficient **A≠0**, teda v našom prípade m≠4, rovnica je kvadratická, určíme diskriminant D.

$$D = B^2 - 4AC = (m+4)^2 - 4(m-4)9 = m^2 + 8m + 16 - 36m + 144 = m^2 - 28m + 160 = (m-20)(m-8)$$

a) Ak $D = 0$, KR má 1 riešenie $x = \frac{-B}{2A}$

$$D = (m-20)(m-8) = 0$$
$$m = 20 \quad \vee \quad m = 8$$

Ak $m = 20$, tak $x = \frac{-(m+4)}{2(m-4)} = \frac{-(20+4)}{2(20-4)} = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4}$

Ak $m = 8$, tak $x = \frac{-(m+4)}{2(m-4)} = \frac{-(8+4)}{2(8-4)} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

b) Ak $D < 0$, KR nemá riešenie

$$D = (m-20)(m-8) < 0$$
$$m \in (8; 20)$$

c) Ak $D > 0$, KR má 2 reálne korene $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$

$$D = (m-20)(m-8) > 0$$
$$m \in (-\infty; 8) \cup (20; \infty) - \{4\}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(m+4) \pm \sqrt{(m-8)(m-20)}}{2(m-4)}$$

2. Riešte v R : $x-\sqrt{x+1}=5$

<u>Riešenie:</u>

Určíme podmienky – výraz pod odmocninou musí byť nezáporný : Pod.: $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

Rovnicu upravíme na tvar $x-5=\sqrt{x+1}$ ... ak chceme získať rovnicu bez odmocniny, tak celú rovnicu umocníme, ale to môžeme urobiť iba za podmienky, že výraz $x-5\geq 0 \Rightarrow x\geq 5$

$$x-5=\sqrt{x+1} \qquad /(\ )^2$$
$$(x-5)^2=x+1$$
$$x^2-10x+25=x+1$$
$$x^2-11x+24=0$$
$$(x-8)(x-3)=0$$
$$x_1=8 \qquad x_2=3 \text{ ...nevyhovuje podm.}$$

Vzhľadom na podmienky je koreňom rovnice iba číslo x = 8. K={ 8 }

3. Riešte v R : $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=1$

<u>Riešenie:</u>

Určíme podmienky - výrazy pod odmocninou musí byť nezáporné

Pod.: $x-1\geq 0 \wedge x+4\geq 1 \Rightarrow x\geq 1 \wedge x\geq -4 \Rightarrow x\geq 1$

Rovnicu upravíme na tvar $2\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x+4}$, teraz sú na oboch stranách nezáporné výrazy a celú rovnicu môžeme umocniť.

$$2\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x+4} \qquad /(\ )^2$$
$$4(x-1)=\left(1+\sqrt{x+4}\right)^2$$
$$4x-4=1+2\sqrt{x+4}+x+4$$
$$3x-9=2\sqrt{x+4} \qquad /(\ )^2$$
$$(3x-9)^2=4(x+4)$$
$$9x^2-54x+81=4x+16$$
$$9x^2-58+65=0$$
$$D=58^2-4\cdot 9\cdot 65=1024$$
$$x_{1,2}=\frac{58\pm 32}{18}$$
$$x_1=5 \qquad x_2=\frac{13}{9} \text{ ...nevyhovuje podm.}$$

Podmienka pre umocnenie
$3x-9\geq 0$
$x\geq 3$

Vzhľadom na podmienky je koreňom rovnice iba číslo x = 5. K={ 5 }

4. Načrtnite graf funkcie $f: y = \frac{3x+2}{x+2}$ **,** určte D(f), H(f) a priesečníky grafu funkcie so súrad. osami.

Riešenie:

Určíme podmienky, za ktorých má výraz $\frac{3x+2}{x+2}$ zmysel. Výraz v menovateli musí byť nenulový, teda $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, odtiaľ D(f) = R–{-2}.

Výraz $\frac{3x+2}{x+2}$ upravíme na tvar $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$.

$$\frac{3x+2}{x+2} = \frac{3x+6-6+2}{x+2} = \frac{3x+6}{x+2} + \frac{-6+2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} + \frac{-4}{x+2} = 3 + \frac{-4}{x+2}$$

H(f) = R–{3}, grafom funkcie bude hyperbola so stredom v bode [-2; 3] a vetvami v 2. a 4. kvadrante.

Priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami.

P_y=[0; ?]; teda x=0; y dopočítame z predpisu funkcie. $y = \frac{3 \cdot 0 + 2}{0+2} = \frac{2}{2} = 1$, P_y=[0; 1]

P_x=[?; 0]; teda y=0; x dopočítame z predpisu funkcie. $0 = \frac{3x+2}{x+2} \Leftrightarrow 3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$, P_x=[-2/3; 0]