

Absolútna hodnota

Absolútnu hodnotu reálneho čísla a označujeme $|a|$.

Definícia: $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

Napríklad: $|6| = 6$ $|-3,1| = 3,1$ $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

Absolútnou hodnotou reálneho nezáporného čísla je to isté reálne číslo. Absolútna hodnota záporného čísla je číslo k nemu opačné.

Vlastnosti absolútnej hodnoty

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí: $|a| \geq 0$ (Absolútna hodnota reálneho čísla je vždy číslo nezáporne.)

$$|-a| = |a| \qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ pre } b \neq 0 \qquad |a + b| \leq |a| + |b|$$

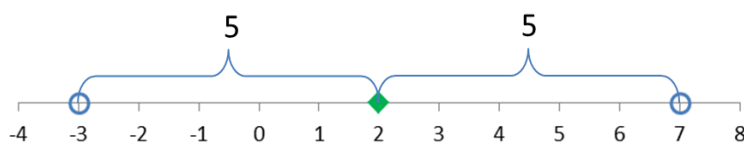
Geometrický význam absolútnej hodnoty

Absolútnou hodnotou reálneho čísla a rozumieme vzdialenosť obrazu čísla a na číselnej osi od začiatku číselnej osi.

Hodnota $|a - b|$ určuje vzdialenosť obrazov dvoch reálnych čísel a, b na číselnej osi a to bez ohľadu na to, či $a > b$ alebo $b > a$.

Príklad 1. Riešte v $\mathbb{R}$: $|x - 2| = 5$

Riešenie: 1. spôsob Vychádzame z geometrického významu absolútnej hodnoty, tak hľadáme také číslo x , ktorého obraz na číselnej osi je od obrazu čísla 2 vzdialený 5 jednotiek.



$$K = \{-3; 7\}$$

Poznámka: Ak danú situáciu zovšeobecníme, tak riešiť rovnicu v tvare $|x - a| = b$; $b \in \mathbb{R}_0^+$ znamená nájsť také číslo x , kt. obraz na číselnej osi je od obrazu čísla a vzdialený b jednotiek.

Pre nerovnicu v tvare $|x - a| > b$; $b \in \mathbb{R}_0^+$ budeme hľadať také číslo x , ktorého obraz na číselnej osi leží od obrazu čísla a vo vzdialenosti väčšej ako b jednotiek.

Pre nerovnicu v tvare $|x - a| < b$; $b \in \mathbb{R}_0^+$ budeme hľadať také číslo x , ktorého obraz na číselnej osi leží od obrazu čísla a vo vzdialenosti menšej ako b jednotiek.

2. spôsob

Vychádzame z definície absolútnej hodnoty, úloha sa rozdelí na dve časti.

V prvej časti budeme riešiť rovnicu pre prípad, že výraz $x - 2$ nadobúda nezáporné hodnoty, v druhej časti pre prípad, že výraz $x - 2$ nadobúda záporné hodnoty.

$$\text{I. } (x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2) \Rightarrow |x - 2| = x - 2$$

rovnica po odstránení absolútnej hodnoty má tvar $x - 2 = 5$

a jej riešením je $x = 7$. Ešte je nutné overiť, či získané riešenie je z intervalu, na ktorom sme danú rovnicu riešili. V tomto prípade je to splnené.

$$\text{II. } (x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2) \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

rovnica po odstránení absolútnej hodnoty má tvar $-x + 2 = 5$

a jej riešením je $x = -3$. Aj v tomto prípade platí, že získané riešenie je z intervalu, na ktorom bola rovnica riešená.

Záver: Riešením rovnice je zjednotenie riešení z oboch častí, teda $K = \{-3; 7\}$.

3. spôsob

Na oboch stranách rovnice sú nezáporné výrazy, preto môžeme celú rovnicu umocniť, po umocnení získavame kvadratickú rovnicu, ktorú je môžeme riešiť pomocou diskriminantu, alebo vhodnými úpravami na súčinnový tvar.

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 5 & /(\quad)^2 \\ (x - 2)^2 &= 5^2 \\ (x - 2)^2 - 5^2 &= 0 \\ (x - 2 - 5)(x - 2 + 5) &= 0 \\ (x - 7)(x + 3) &= 0 \\ x_1 &= 7 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$K = \{-3; 7\}$$

Rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou

Sú to také rovnice (nerovnice), v ktorých neznáma, resp. výraz, ktorý neznámu obsahuje sa nachádza v absolútnej hodnote.

Riešiť rovnice (nerovnice) s absolútnymi hodnotami znamená upraviť rovnicu (nerovnicu) na tvar, ktorý už nebude obsahovať výrazy s absolútnymi hodnotami.

Ak riešime rovnicu (nerovnicu) s jednou absolútnou hodnotou, tak v prvom kroku riešenia odstránime na základe definície absolútnu hodnotu z rovnice (nerovnice). Riešenie úlohy sa rozdelí na dve časti.

V niektorých prípadoch je možné riešiť rovnicu s absolútnou hodnotou tak, že obe strany rovnice umocníme. Keďže umocňovanie je neekvivalentnou úpravou, súčasťou riešenia úlohy musí byť aj skúška.

Efektívnym spôsobom riešenia rovnice (nerovnice) s viacerými absolútnymi hodnotami je použiť metódu **nulových bodov**. Nulovým bodom budeme rozumieť také číslo, pre ktoré je výraz v absolútnej hodnote rovný nule. Množinu reálnych čísel rozdelíme na základe nulových bodov na niekoľko intervalov. Na každom z týchto intervalov vieme každý výraz s absolútnou hodnotou zapísať bez absolútnej hodnoty, tým upravíme pôvodnú rovnicu (nerovnicu) na tvar bez absolútnych hodnôt a riešime ju na príslušnom intervale.

Príklad 2. Riešte v $\mathbb{R}$: $|x+1| + 2 \cdot |6-x| = 10$

Riešenie: Využijeme metódu nulových bodov. Nulové body sú čísla, pre ktoré výrazy v absolútnych hodnotách majú hodnotu rovnú nule. V našom prípade nulové body získame vyriešením rovníc $x+1=0$ a $6-x=0$.

Nulové body : -1; 6

Množinu reálnych čísel rozdelíme pomocou nulových bodov na tri intervaly a na každom z budeme riešiť príslušnú rovnicu bez absolútnych hodnôt. Riešenie prehľadne zapíšeme do tabuľky.

	I₁ $x \in (-\infty; -1)$	I₂ $x \in (-1; 6)$	I₃ $x \in (6; \infty)$
$x+1$	-	+	+
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$6-x$	+	+	-
$ 6-x $	$6-x$	$6-x$	$-6+x$
$ x+1 + 2 \cdot 6-x = 10$	$-x-1+2(6-x)=10$ $-3x+11=10$ $-3x=-1$ $x=\frac{1}{3}$ $x=\frac{1}{3} \notin I_1$	$x+1+2(6-x)=10$ $-x+13=10$ $-x=-3$ $x=3$ $x=3 \in I_2$	$x+1+2(-6+x)=10$ $3x-11=10$ $3x=21$ $x=7$ $x=3 \in I_2$
K	$K_1 = \emptyset$	$K_2 = \{3\}$	$K_3 = \{7\}$

Množina koreňov rovnice je $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{3; 7\}$.

Pre domáce štúdium a overenie výsledkov odporúčame stránku www.wolframalpha.com

Do vstupného poľa stačí zadať rovnicu zapísanú v správnom tvare, v tomto prípade zápis:
abs(x+1)+2abs(6-x)=10 Aplikácia poskytne výsledky a grafické riešenie príslušnej rovnice.

Príklad 4. Riešte v R: $|x+1| + 2 \cdot |6-x| \geq 10$

Riešenie Pri riešení nerovnice taktiež môžeme využiť metódu nulových bodov. Rovnako ako v predchádzajúcom príklade budú nulové body -1; 6, stredná časť tabuľky bude rovnaká, v tomto prípade riešime nerovnice na príslušných intervaloch.

	I₁ $x \in (-\infty; -1\rangle$	I₂ $x \in \langle -1; 6\rangle$	I₃ $x \in \langle 6; \infty)$
$x+1$	-	+	+
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$6-x$	+	+	-
$ 6-x $	$6-x$	$6-x$	$-6+x$
$ x+1 + 2 \cdot 6-x \geq 10$	$-x-1+2(6-x) \geq 10$ $-3x+11 \geq 10$ $-3x \geq -1$ $x \leq \frac{1}{3}$ $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle$	$x+1+2(6-x) \geq 10$ $-x+13 \geq 10$ $-x \geq -3$ $x \leq 3$ $x \in (-\infty; 3\rangle$	$x+1+2(-6+x) \geq 10$ $3x-11 \geq 10$ $3x \geq 21$ $x \geq 7$ $x \in \langle 7; \infty)$
K	$K_1 = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cap I_1$ $K_1 = (-\infty; -1\rangle$	$K_2 = (-\infty; -3\rangle \cap I_2$ $K_2 = \langle -1; 3\rangle$	$K_3 = \langle 7; \infty) \cap I_3$ $K_3 = \langle 7; \infty)$

Množina koreňov nerovnice je zjednotením intervalov $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. $K = (-\infty; 3\rangle \cup \langle 7; \infty)$