

Polynomicke funkcia

Def.: Funkciu danú predpisom $f : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \neq 0$ nazývame **polynomicke funkcia n-tého stupňa**.

Ak $n = 1$, tak ide o polynomicke funkciu 1. stupňa, taktiež nazývanú lineárna funkcia.

$$\text{Napri. } f : y = 3x - 2$$

Ak $n = 2$, tak ide o polynomicke funkciu 2. stupňa, taktiež nazývanú kvadraticke funkcia.

$$\text{Napri. } f : y = -x^2 + x - 2$$

Ak $n = 3$, tak ide o polynomicke funkciu 3. stupňa, taktiež nazývanú kubické funkcia.

$$\text{Napri. } f : y = x^3 - 5x + 1$$

Ak $n = 4$, tak ide o polynomicke funkciu 4. stupňa. Napri. $f : y = -2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2$

Vlastnosti polynomickej funkcie

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá. Ak n je nepárne, tak funkcia f je neohraničená.

Ak n je párne, tak pre $a_n > 0$ je funkcia zdola ohraničená, pre $a_n < 0$ je funkcia ohraničená zhora.

Polynomicke funkcia n -tého stupňa má najviac n nulových bodov, t.j. spoločných bodov grafu polynomickej funkcie a osi x -ovej.

Nájsť nulové body polynomickej funkcie znamená riešiť algebraickú rovnicu $f(x) = 0$.

Ak x_0 je nulové miesto polynomickej funkcie f n -tého stupňa (alebo koreňom príslušnej algebraickej rovnice), potom funkciu f je možné zapísať v tvare $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, kde g je polynomicke funkcia stupňa $n-1$.

Dvojčlen $x - x_0$ nazývame koreňový činiteľ.

Príklad 1: Určte nulové body funkcie $f : y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ a načrtnite jej graf.

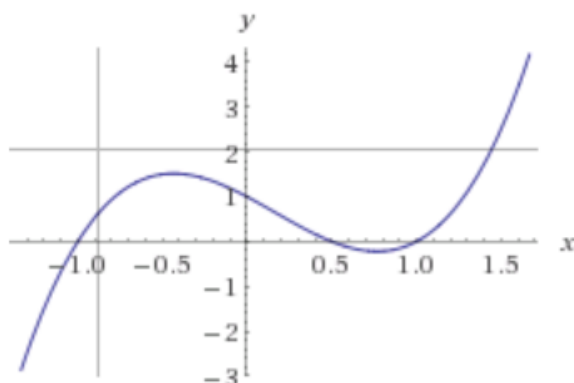
Riešenie : Polynóm $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ rozložíme na súčin pomocou algebraických úprav.

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 2x + 1 &= (2x^3 - 2x) + (-x^2 + 1) = 2x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(2x - 1) = (x - 1)(x + 1)(2x - 1) \end{aligned}$$

Odtiaľ získame nulové body : $+1$; -1 ; $\frac{1}{2}$

Funkcia je polynomicke funkcia 3-tého stupňa, koeficient pri x^3 je kladný, preto pre x blížiac sa k $-\infty$ budú nadobúdať záporné hodnoty.

Graf :



Pre domáce štúdium odporúčam stránku www.wolframalpha.com

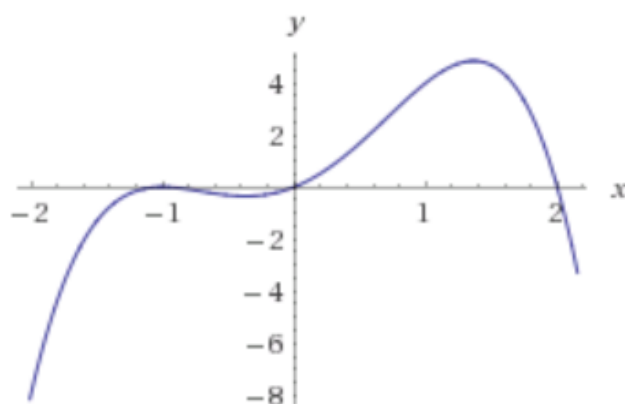
Do vstupného poľa stačí zadať polynóm v správnom tvare, pre danú funkciu to bude zápis v tvare :

$2x^3 - x^2 - 2x + 1$ Program vám vykreslí graf, rozloží polynóm na súčin, určí nulové body.

Príklad 3: Daná je funkcia $f : y = -x(x-2)(x+1)^2$. Načtnite graf funkcie.

Riešenie : Funkcia f má nulové body : 0; 2; -1, pričom $x=-1$ je dvojnásobným nulovým bodom, preto graf funkcie sa bude v bode -1 dotýkať osi x . Funkcia je polynomickejšia funkcia 4-tého stupňa, koeficient pri x^4 je záporné číslo, preto pre x blížiac sa k $-\infty$ budú nadobúdať záporné hodnoty.

Graf:



Neriešené príklady

1. Určte nulové body a načrtnite graf funkcie

$$f_1 : y = 2x^3 - 5x + 3$$

$$f_2 : y = -x^4 - x^3 + x + 1$$

$$f_3 : y = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$$

$$f_4 : y = (x-1)(3-x)(x+2)^2$$

$$f_5 : y = x(x-4)(x^2-1)^2$$

2. Napíšte predpis polynomickej funkcie 3. stupňa, ak viete, že daná funkcia má nulové body 2 a -2, načrtnite jej graf.

3. Určte hodnoty koeficientov a, b funkcie $h : y = x^3 + ax^2 - 2x + b$, ak funkcia má NB v bode $x=1$ a $h(-2) = 9$. Načrtnite graf funkcie.