

Príprava na 2. školskú úlohu

1. Riešte v R rovnice s neznámou x a parametrom m

a) $x^2 + 4x - 10 + m = 0$

b) $x^2 - 2(m+4)x + m^2 + 6m = 0$

c) $x^2 - x - mx + 1 = 0$

d) $mx^2 - 2mx - 3 = 0$

2. Určte parameter m, tak aby kvadratická rovnica mala práve jedno riešenie

a) $x^2 + 3mx + 1 + 2m^2 = 0$

b) $mx^2 - 8x + m = 0$

c) $(m^2 - 1)x^2 + 2mx + 1 = 0$

d) $x^2 - mx + 5 = m - 2x$

3. Načrtnite graf funkcie, určte D(f), H(f)

$f_1: y = (x+3)^5 - 2$

$f_2: y = (x-2)^{-6} + 1$

$f_3: y = -(x+1)^4$

$f_4: y = |(x-1)^{-3} - 2|$

$f_5: y = 3 + \frac{1}{(x+3)^5}$

$f_6: y = \frac{x^3 \cdot (-x)^5}{x^{-2}}$

$f_7: y = \sqrt{x^4 \cdot x^{-2}}$

$f_8: y = (\sqrt{x})^6 \cdot (1-x^{-1})^3$

4. Zjednodušte výrazy

a) $\sqrt{\left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{a}}{a^6 \cdot \sqrt[3]{a}}\right)^{-3}} : \left(a \cdot \sqrt{\frac{a \cdot \sqrt{a}}{a^3}}\right)^{-1} =$

b) $\frac{\sqrt{u} \cdot \sqrt{uv}}{u \cdot \sqrt{v}} \cdot \frac{u^2 \cdot \sqrt{uv}}{\sqrt[4]{uv^2}} =$

c) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot \sqrt{xy}}{y \cdot \sqrt{xy^3}}} : \sqrt{\frac{x \cdot \sqrt{x}}{y \cdot \sqrt{y}}} =$

d) $\left(\frac{b^{\frac{1}{2}} - (ab)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} - a}{b^{\frac{1}{2}}}\right) : \frac{a-b}{(ab)^{\frac{1}{2}}} =$

e) $\frac{m^{-0,5} + 1}{m^{-0,5} - 1} + \frac{1 - m^{-0,5}}{m^{-0,5} + 1} =$

f) $\frac{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}} =$

5. Využitím vlastností vhodnej mocnínovej funkcie usporiadate čísla podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie

a) $(1,5)^{-6}; (0,25)^3; 3^0; (-0,2)^{-3}; -1$

b) $3^{-4}; (1,7)^{-8}; (-3,1)^{-4}; 4^{-2}; 8^{-1}; (0,3)^2$

6. Riešte v R

a) $\sqrt{2x-1} = 3$

K={5}

b) $\sqrt{x+5} = -1$

K=∅

c) $\sqrt{4-x} = \sqrt{x+2}$

K={1}

d) $\sqrt{2x-5} = \sqrt{1-x}$

K=∅

e) $\sqrt{12-x} = x$

K={3}

f) $\sqrt{x-2} = x-4$

K={6}

g) $\sqrt{7-x} = x-1$

K={3}

h) $2\sqrt{x+5} = x+2$

K={4}

i) $\sqrt{25-x^2} = x+1$

K={3}

j) $\sqrt{5x+x^2} = 2x-2$

K={4}

k) $\sqrt{2x^2-1} = x+2$

K={-1; 5}

l) $\sqrt{10+x-x^2} = x-1$

K={3}

7. Riešte v R

a) $\sqrt{7-2\sqrt{x+3}} = \sqrt{18-13\sqrt{x+3}}$	$K=\{-2\}$	b) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$	$K=\{-1; 2\}$
c) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x+4}$	$K=\{0,5; 5\}$	d) $\sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{13-x}$	$K=\{9\}$
e) $\sqrt{x+36} = 18 - \sqrt{x}$	$K=\{64\}$	f) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$	$K=\{-1; 15\}$
g) $\sqrt{8x+9} = \sqrt{4x+1} + 4$	$K=\{20\}$	h) $\sqrt{x+9} = 1 - \sqrt{x+2}$	$K=\emptyset$
i) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2} = \sqrt{-x}$	$K=\{-0,2; -1\}$	j) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$	$K=\{-1\}$
k) $\sqrt{9x^2 + 4\sqrt{6x+2}} = 3x + 2$	$K=\{\pm 1/3\}$		

8. Načrtnite graf funkcie, určte D(f), H(f) a priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami

$f_1: y = \frac{x+3}{x-1}$	$f_2: y = \frac{2x+3}{x-1}$	$f_3: y = \frac{x+3}{x+5}$	$f_4: y = \frac{3x+1}{x+1}$
$f_5: y = \frac{2x-1}{1-x}$	$f_6: y = \frac{2-x}{x+2}$	$f_7: y = \frac{x+3}{2x-1}$	$f_8: y = \frac{3x+5}{1-2x}$
$f_9: y = \left \frac{x+2}{x} \right $	$f_{10}: y = 1 + \left \frac{2}{x+3} \right $		

9. Určte predpis lineárnej lomenej funkcie, ktorá prechádza bodom

- a) $A=[1; -2]$ a má $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- b) $B=[-2; 4]$ a má $D(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$; $H(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$
- c) $C=[6; 2]$ a má $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$; $H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Riešené úlohy

1. **Riešte v R rovnicu** $mx^2 + mx + 9 = 4x^2 - 4x$ **s parametrom m**

Riešenie:

Rovnicu prevedieme do základného tvaru, určíme koeficienty A, B, C.

$$\begin{aligned} mx^2 + mx + 9 &= 4x^2 - 4x \\ mx^2 - 4x^2 + mx + 4x + 9 &= 0 \\ (m-4)x^2 + (m+4)x + 9 &= 0 \\ \mathbf{A = m-4} \quad \mathbf{B = m+4} \quad \mathbf{C = 9} \end{aligned}$$

I. Ak koeficient **A=0**, teda v našom prípade **m=4**, rovnica nie je kvadratická, ale lineárna

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 9 &= 4x^2 - 4x \\ 8x &= 9 \\ x &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

II. Ak koeficient **A≠0**, teda v našom prípade **m≠4**, rovnica je kvadratická, určíme diskriminant D.

$$D = B^2 - 4AC = (m+4)^2 - 4(m-4)9 = m^2 + 8m + 16 - 36m + 144 = m^2 - 28m + 160 = (m-20)(m-8)$$

a) Ak $D=0$, KR má 1 riešenie $x = \frac{-B}{2A}$

$$\begin{aligned} D &= (m-20)(m-8) = 0 \\ m &= 20 \quad \vee \quad m = 8 \end{aligned}$$

$$\text{Ak } m=20, \text{ tak } x = \frac{-(m+4)}{2(m-4)} = \frac{-(20+4)}{2(20-4)} = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Ak } m=8, \text{ tak } x = \frac{-(m+4)}{2(m-4)} = \frac{-(8+4)}{2(8-4)} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

b) Ak $D < 0$, KR nemá riešenie

$$\begin{aligned} D &= (m-20)(m-8) < 0 \\ m &\in (8; 20) \end{aligned}$$

c) Ak $D > 0$, KR má 2 reálne korene $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$

$$\begin{aligned} D &= (m-20)(m-8) > 0 \\ m &\in (-\infty; 8) \cup (20; \infty) - \{4\} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(m+4) \pm \sqrt{(m-8)(m-20)}}{2(m-4)}$$

2. Riešte v R : $x - \sqrt{x+1} = 5$

Riešenie: **OPRAVENÉ**

Určíme podmienky – výraz pod odmocninou musí byť nezáporný : Pod.: $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Rovnicu upravíme na tvar $x-5 = \sqrt{x+1}$... ak chceme získať rovnicu bez odmocniny, tak celú rovnicu umocníme, ale to môžeme urobiť iba za podmienky, že výraz $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

$$\begin{aligned}x-5 &= \sqrt{x+1} \quad / ()^2 \\(x-5)^2 &= x+1 \\x^2 - 10x + 25 &= x+1 \\x^2 - 11x + 24 &= 0 \\(x-8)(x-3) &= 0 \\x_1 &= 8 \quad x_2 = 3 \text{ ...nevyhovuje podm.}\end{aligned}$$

Vzhľadom na podmienky je koreňom rovnice iba číslo $x = 8$. $K = \{ 8 \}$

3. Riešte v R : $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 1$

Riešenie:

Určíme podmienky - výrazy pod odmocninou musí byť nezáporné

Pod.: $x-1 \geq 0 \wedge x+4 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \wedge x \geq -4 \Rightarrow x \geq 1$

Rovnicu upravíme na tvar $2\sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x+4}$, teraz sú na oboch stranách nezáporné výrazy a celú rovnicu môžeme umocniť.

$$\begin{aligned}2\sqrt{x-1} &= 1 + \sqrt{x+4} \quad / ()^2 \\4(x-1) &= (1 + \sqrt{x+4})^2 \\4x - 4 &= 1 + 2\sqrt{x+4} + x + 4 \\3x - 9 &= 2\sqrt{x+4} \quad / ()^2 \\(3x-9)^2 &= 4(x+4) \\9x^2 - 54x + 81 &= 4x + 16 \\9x^2 - 58x + 65 &= 0 \\D &= 58^2 - 4 \cdot 9 \cdot 65 = 1024 \\x_{1,2} &= \frac{58 \pm 32}{2 \cdot 9} \\x_1 &= 5 \quad x_2 = \frac{13}{9} \text{ ...nevyhovuje podm.}\end{aligned}$$

Podmienka pre umocnenie

$$3x - 9 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

Vzhľadom na podmienky je koreňom rovnice iba číslo $x = 5$. $K = \{ 5 \}$

4. Načrtnite graf funkcie $f : y = \frac{3x+2}{x+2}$, určte $D(f)$, $H(f)$ a priesečníky grafu funkcie so súrad. osami.

Riešenie:

Určíme podmienky, za ktorých má výraz $\frac{3x+2}{x+2}$ zmysel. Výraz v menovateli musí byť nenulový, teda $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, odtiaľ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Výraz $\frac{3x+2}{x+2}$ upravíme na tvar $y = y_0 + \frac{k}{x-x_0}$.

$$\frac{3x+2}{x+2} = \frac{3x+6-6+2}{x+2} = \frac{3x+6}{x+2} + \frac{-6+2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} + \frac{-4}{x+2} = 3 + \frac{-4}{x+2}$$

$H(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, grafom funkcie bude hyperbola so stredom v bode $[-2; 3]$ a vetvami v 2. a 4. Kvadrante.

Priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami.

$P_y = [0; ?]$; teda $x=0$; y dopočítame z predpisu funkcie. $y = \frac{3 \cdot 0 + 2}{0 + 2} = \frac{2}{2} = 1$, $P_y = [0; 1]$

$P_x = [?; 0]$; teda $y=0$; x dopočítame z predpisu funkcie. $0 = \frac{3x+2}{x+2} \Leftrightarrow 3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$, $P_x = [-2/3; 0]$

