

## Kombinatorika – 2. časť

### Kombinácie bez opakovania

Nech je daná  $n$ -prvková množina  $M$ . **Kombináciou**  $k$ -tej triedy z  $n$  prvkov budeme rozumieť  $k$ -prvkovú podmnožinu množiny  $M$ . (prvky sú rôzne, na poradí prvkov nezáleží)

Počet všetkých kombinácií bez opakovania  $k$ -tej triedy z  $n$  prvkov určíme podľa vzťahu :

$$C(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{V(k, n)}{k!}$$

#### Príklady

- Koľko existuje 3-prvkových podmnožín vytvorených z 8-prvkovej množiny.
- Koľkými spôsobmi si môžeme vybrať 3 výrobky z desiatich, ktoré sú v ponuke.
- Koľko existuje možností na vyplnenie tiketu lota, ak vyplníme 6 čísel z 49 možných.

### Kombinačné čísla

Číslo  $\binom{n}{k}$  nazývame **kombinačné číslo**, určuje počet  $k$ -prvkových podmnožín vytvorených z  $n$ -prvkovej množiny.

#### Vlastnosti kombinačných čísel :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

#### Pascalov trojuholník



Počet všetkých podmnožín  $n$ -prvkovej množiny je  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

#### Binomická veta :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

### Príklady na precvičenie

1. Mirka má v skrini 10 rôznych tričiek. Balí sa na výlet a potrebuje si vybrať 3 tričká. Koľkými spôsobmi to môže urobiť?
2. Basketbalové družstvo tvorí 5 hráčov. Určte koľko možností ma na zostavenie družstva jeho tréner, ak má k dispozícii 12 hráčov.
3. Koľkými spôsobmi možno zo sady 12 rôznofarebných farbičiek, medzi ktorými je čierna farbička vybrať tri farbičky tak, aby
  - a) jedna z nich bola čierna?
  - b) ani jedna farbička nebola čierna?
4. V rote je 5 dôstojníkov a 50 vojakov. Koľkými spôsobmi možno zostaviť službu, ktorá pozostáva
  - a) z jedného dôstojníka a troch vojakov?
  - b) z dvoch dôstojníkov a piatich vojakov ?
5. Pri výrobe voňavky sa používa 16 rôznych prísad. Koľko rôznych voňaviek je možné vyrobiť, ak
  - a) na voňavku použijeme 4 rôzne prísady v pomere 1:2:3:4?
  - b) na voňavku použijeme 4 rôzne prísady v pomere 1:1:1:1?
  - c) na voňavku použijeme 4 rôzne prísady v pomere 1:2:2:3?
6. V triede je 12 chlapcov a 16 dievčat. Koľko existuje možností na vytvorenie
  - a) 4-členného triedneho výboru?
  - b) 4-členného triedneho výboru pozostávajúceho z predsedu a troch členov?
  - c) 4-členného výboru, v ktorom budú dvaja chlapci a dve dievčatá?
  - d) 4-členného výboru, v ktorom budú najviac dvaja chlapci?
  - e) 4-členného výboru, v ktorom bude aspoň jeden chlapec?
  - f) 4-členného výboru pozostávajúceho z predsedu – chlapca a troch členov?
7. Šesť spolužiačok sa dohodlo, že z prázdnin si navzájom každá každej pošlú pohľadnicu. Koľko pohľadníc si celkovo navzájom poslali?
8. Pri stretnutí si priatelia podali každý s každým raz ruku. Počet všetkých podaní rúk bol 78. Koľko priateľov sa stretlo?
9. Z balíčka sedmových kariet si vyberieme 4 karty. Koľko existuje možností, aby sme vo výbere mali
  - a) práve jedno eso
  - b) aspoň jedno eso
  - c) všetky 4 esá
  - d) práve jednu červeňovú kartu
  - e) aspoň jednu červeňovú kartu
  - f) všetky 4 červeňové karty
  - g) červeňové eso
  - \*h) práve jedno eso a jednu červeňovú kartu
  - i) dve červeňové karty a dve zeleňové karty
  - j) práve jedno eso a jedného kráľa
10. V obchode majú hrnčeky v týchto farbách : biela, ružová, žltá, oranžová, červená, modrá, fialová, zelená a sivá. Iveta si chce kúpiť 4 rôznofarebné hrnčeky. Koľko možnosti nákupu má,
  - a) Ak chce mať určite žltý hrnček?
  - b) Ak nechce kúpiť ani sivý ani biely hrnček
  - c) Ak sa chce vyhnúť kombinácii modrej a zelenej

11. Na kružnici je umiestnených 9 rôznych bodov. Koľko existuje trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia v týchto bodoch?
12. Dané sú dve rovnobežné priamky  $p$ ,  $q$ . Na priamke  $p$  leží 8 rôznych bodov  $P_1, P_2, \dots, P_8$ . Na priamke  $q$  leží 10 rôznych bodov  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{10}$ . Určte koľko rôznych trojuholníkov s vrcholmi v daných bodoch je možné vytvoriť?
13. Daný je štvorec ABCD. Na každej jeho strane je zvolených 5 rôznych vnútorných bodov. Určte počet všetkých trojuholníkov PQR, ktorých vrcholy ležia v daných bodoch
- na rôznych stranách štvorca ABCD.
  - pričom jedna strana trojuholníka leží na niektorej strane štvorca?
14. Riešte rovnicu
- $\binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{2} = 9$
  - $\binom{n-1}{n-3} = 8 + n$
  - $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{n-4} = 4 \cdot \binom{n}{0}$
  - $\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} = 67$
  - $\binom{10}{1} \binom{x}{x-2} - \binom{x+3}{x+1} = 15$

#### Výsledky:

- $C_{(3,10)} = \binom{10}{3}$     2.  $C_{(5,12)} = \binom{12}{5}$     3. a)  $C_{(2,11)} = \binom{11}{2}$     b)  $C_{(3,11)} = \binom{11}{3}$
- a)  $\binom{5}{1} \cdot \binom{50}{3}$     b)  $\binom{5}{2} \cdot \binom{50}{5}$     5. a)  $V_{(4,16)} = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$     b)  $\binom{5}{2} \cdot \binom{50}{5}$     c)  $\binom{16}{2} \cdot 14 \cdot 13$
- a)  $\binom{16}{4}$     b)  $\binom{28}{1} \cdot \binom{27}{3}$  alebo  $\binom{28}{4} \cdot \binom{4}{1}$     c)  $\binom{12}{2} \cdot \binom{16}{2}$
- d)  $\binom{12}{0} \cdot \binom{16}{4} + \binom{12}{1} \cdot \binom{16}{3} + \binom{12}{2} \cdot \binom{16}{2}$     e)  $\binom{28}{4} - \binom{12}{4}$     f)  $\binom{12}{1} \cdot \binom{27}{3}$
- $V_{(2,6)} = 6.5$     8.  $\binom{n}{2} = 78; n = 13$
- a)  $\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3}$     b)  $\binom{32}{4} - \binom{28}{4}$     c)  $\binom{4}{4} = 1$     d)  $\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{3}$     e)  $\binom{32}{4} - \binom{24}{4}$     f)  $\binom{8}{4}$
- g)  $\binom{31}{3}$     h)  $\binom{21}{3} + \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{21}{2}$     i)  $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2}$     j)  $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{24}{2}$
- a)  $\binom{8}{3}$     b)  $\binom{7}{4}$     c)  $\binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4}$     11.  $\binom{9}{3}$     12.  $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1} + \binom{10}{1} \cdot \binom{8}{2}$
- a)  $\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1}$     b)  $\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{15}{1}$
- a)  $n=5; n=-1 \dots$  nevyhovuje    b)  $n=7; n=-2 \dots$  nevyhovuje    c)  $n=4; n=-1 \dots$  nevyhovuje
- d)  $n=10; n=-13 \dots$  nevyhovuje    e)  $n=3; n=-4/3 \dots$  nevyhovuje