

Zhodné zobrazenia

Zhodné zobrazenie v rovine je každé zobrazenie v rovine, ktoré má vlastnosť, že pre ľubovoľné body X, Y tejto roviny a ich obrazy X', Y' platí: $|XY| = |X'Y'|$.

Zhodné zobrazenia

- Identita (bod a jemu odpovedajúci bod sú identické)
- Osová súmernosť
- Stredová súmernosť
- Otočenie
- Posunutie

Samodružný bod – bod, ktorý sa v danom zobrazení zobrazí sám do seba : $X' \equiv X$

Samodružný útvar – útvar, ktorý sa v danom zobrazení zobrazí sám do seba

Zhodnosť môže byť súhlasná (zachováva sa orientácia vzoru a obrazu) alebo nesúhlasná (orientácia vzoru a obrazu sú opačné)

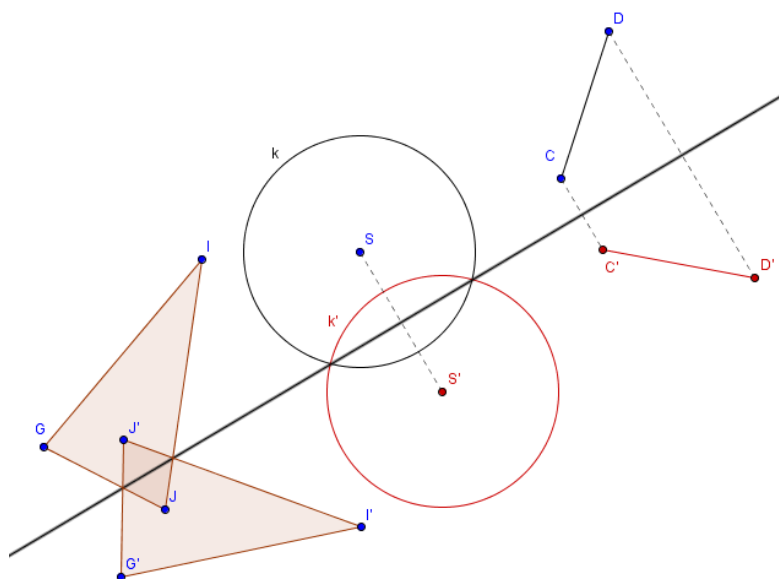
Osová súmernosť v rovine je zhodné zobrazenie dané osou o , ktoré každému bodu X roviny priradí bod X' nasledujúcim spôsobom

1. Ak $X \in o$, tak $X' \equiv X$.
2. Ak $X \notin o$, tak $XX' \perp o \wedge |Xo| = |X'o|$

Samodružné body : body osi o

Samodružné útvary : os o , priamky kolmé na os, kružnica, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, deltoid, pravidelné n -uholníky

Poznámka : Ak je priamka rovnobežná s osou, tak jej obrazom je tiež priamka rovnobežná s osou. Ak je priamka rôznobežná s osou, jej obrazom je tiež rôznobežka s osou a spoločný bod týchto priamok (obrazu a vzoru) leží na osi.



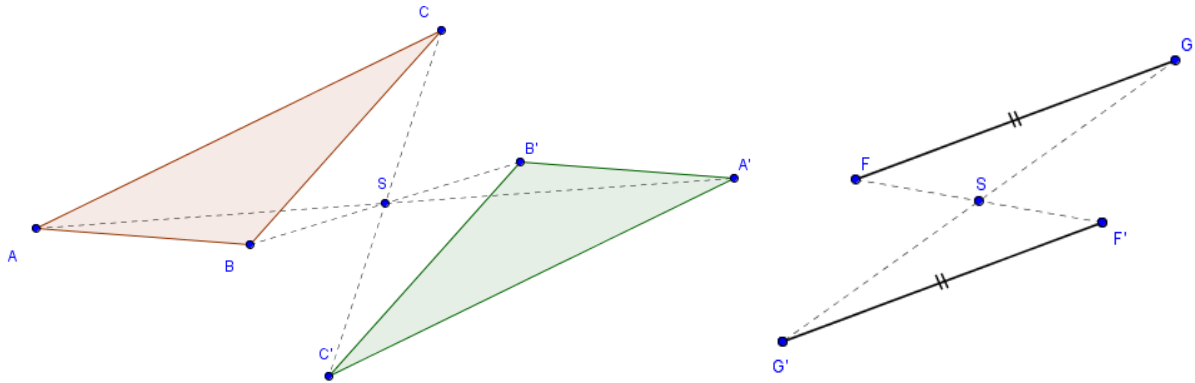
Stredová súmernosť v rovine je zhodné zobrazenie dané stredom S , ktoré každému bodu X roviny priradí bod X' nasledujúcim spôsobom

1. Ak $X \equiv S$, tak $X' \equiv X$.
2. Ak $X \neq S$, tak $S \in XX' \wedge |XS| = |X'S|$

Samodružné body : bod S

Samodružné útvary : priamky prechádzajúce bodom S , kružnica, rovnobežníky, pravidelné n -uholníky pre n – párne

Poznámka: Priamka a jej obraz v stredovej súmernosti sú rovnobežné priamky.

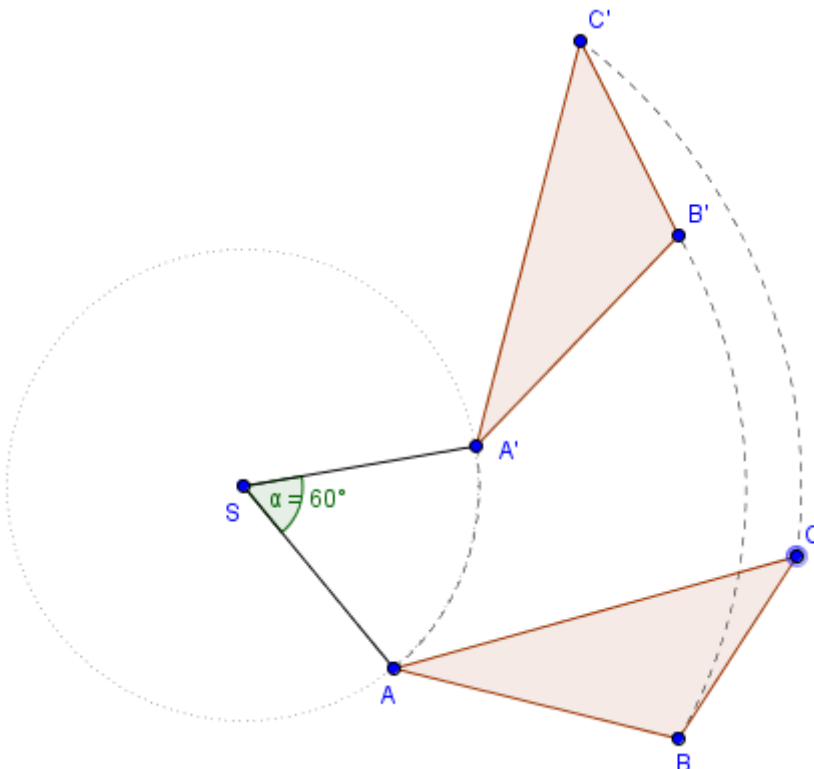


Otočenie v rovine je zhodné zobrazenie dané stredom S a orientovaným uhlom φ , ktoré každému bodu X roviny priradí bod X' nasledujúcim spôsobom

1. Ak $X \equiv S$, tak $X' \equiv X$.
2. Ak $X \neq S$, tak $|XS| = |X'S| \wedge \angle XSX'$

Samodružné body : bod S

Samodružné útvary : kružnica, pravidelné n -uholníky



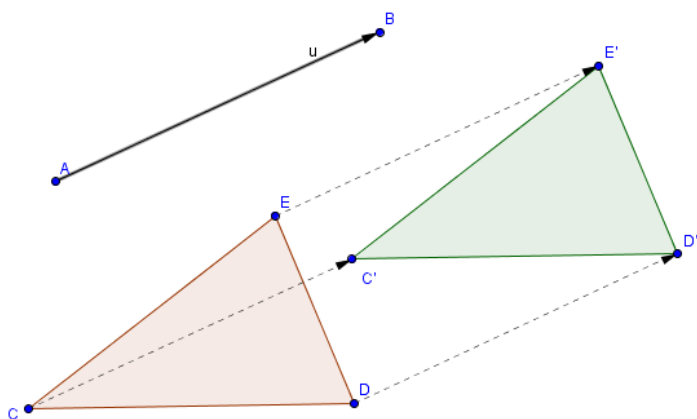
Posunutie je zhodné zobrazenie dané vektorom $\vec{u}$, ktoré každému bodu X roviny priradí obraz X' :

$$X' = X + \vec{u}$$

samodružné body : nemá

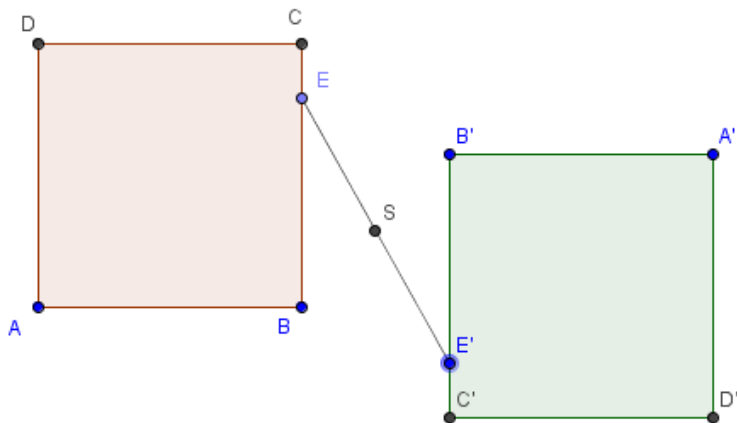
samodružné priamky: priamky rovnobežné s vektorom $\vec{u}$

Poznámka : vzor a obraz priamky v posunutí sú navzájom rovnobežné



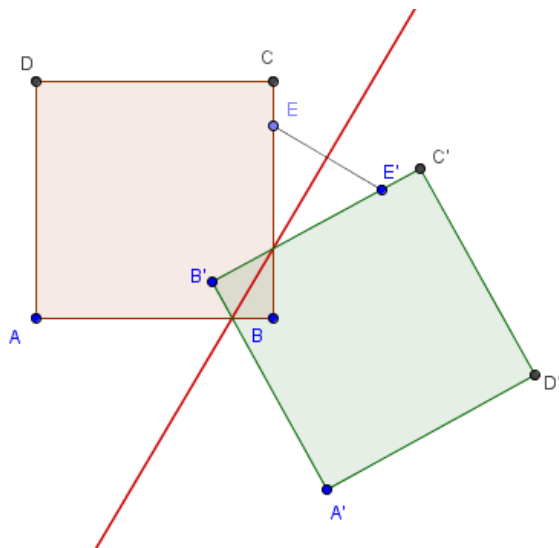
Príklady:

1. Daný je štvorec ABCD. Na strane BC leží bod E. V stredovej súmernosti sa bod E zobrazí do E' . Určte obraz štvorca $A'B'C'D'$.



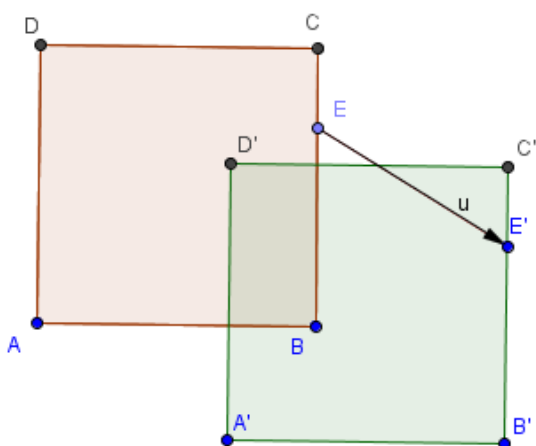
Riešenie : Najskôr určíme stred stredovej súmernosti na základe dvojice odpovedajúcich si bodov E, E' . Stredom súmernosti je S - stred úsečky EE' . Následne v stredovej súmernosti so stredom S zobrazíme obraz štvorca.

2. Daný je štvorec ABCD. Na strane BC leží bod E. V osovej súmernosti sa bod E zobrazí do E' . Určte obraz štvorca $A'B'C'D'$.



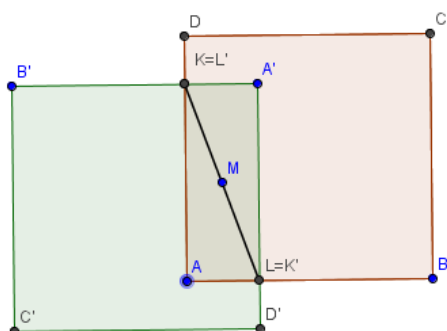
Riešenie : Najskôr určíme os osovej súmernosti na základe dvojice odpovedajúcich si bodov E, E' . Osou súmernosti je priamka o - os úsečky EE' . Následne v osovej súmernosti s priamkou o zobrazíme obraz štvorca.

3. Daný je štvorec $ABCD$. Na strane BC leží bod E . V posunutí sa bod E zobrazí do E' . Určte obraz štvorca $A'B'C'D'$.



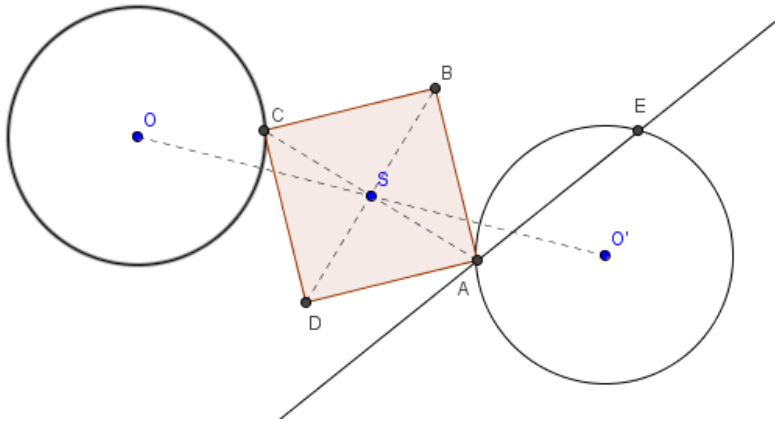
Riešenie : Najskôr určíme vektor posunutia, tým bude orientovaná úsečka EE' . Následne v tomto posunutí zobrazíme obraz štvorca.

4. Daný je štvorec $ABCD$ a vnútri štvorca bod M . Určte úsečku KL , ktorej krajné body ležia na stranách štvorca a bod M je jej stredom.



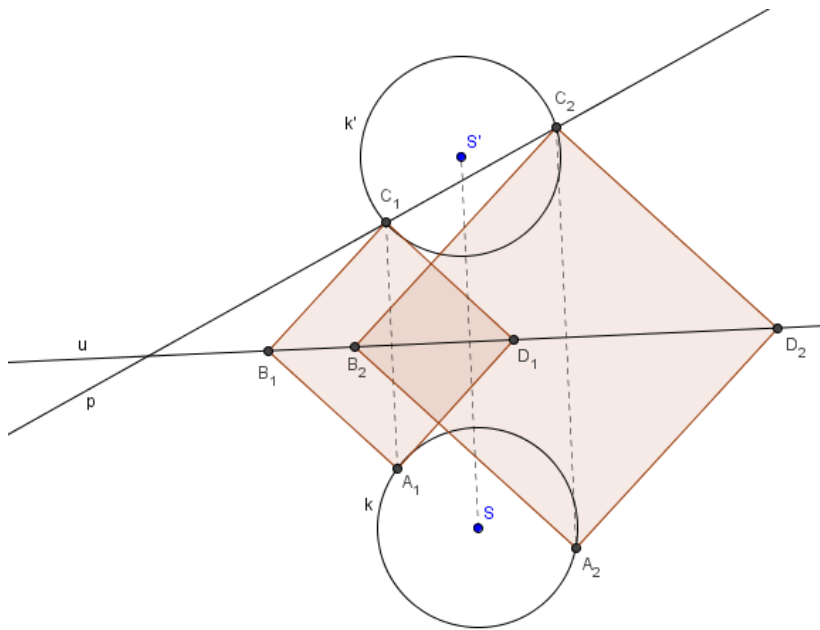
Riešenie : M je stredom úsečky KL, to znamená, že M je stredom súmernosti, v ktorej sa bod K zobrazí do bodu L. Na nájdenie bodov K, L využijeme stredovú súmernosť so stredom M. V tejto súmernosti zobrazíme štvorec ABCD. Hľadané body K, L ležia na stranách štvorca, preto nimi budú spoločné na stranách vzoru a obrazu štvorca.

5. Daný bod S, kružnica $k(O; r)$, priamka p. Zostrojte štvorec ABCD tak, aby bod A ležal na priamke p, bod C na kružnici k a bod S bol stredom štvorca.



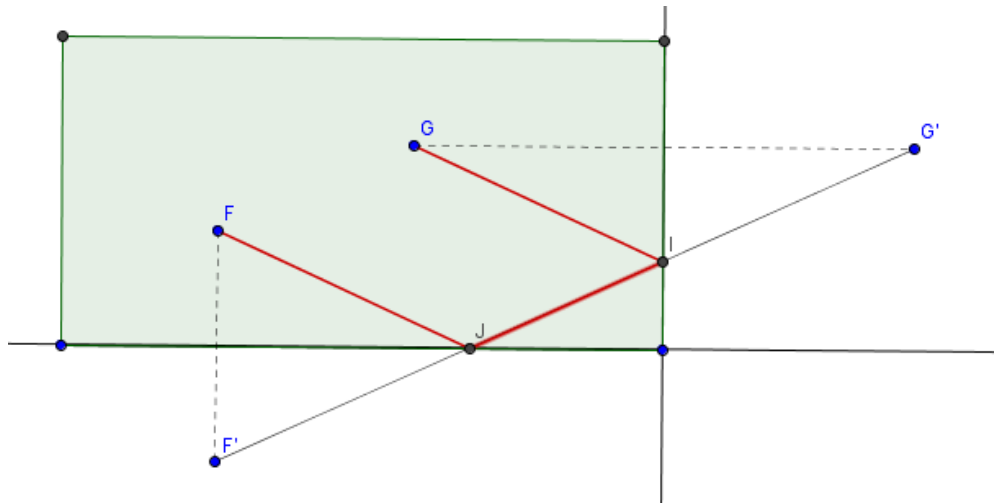
Riešenie : Bod S je stredom štvorca, t.j. je aj stredom úsečky AC – uhlopriečky štvorca, to znamená, že S je stredom súmernosti, v ktorej sa bod A zobrazí do bodu C a naopak. Na nájdenie bodov A, C využijeme stredovú súmernosť so stredom S. V tejto súmernosti zobrazíme kružnicu k na k' . Hľadané bod A leží na priamke p a súčasne na kružnici k' .

6. Daná je kružnica $k(S; r)$, priamky p, u. Zostrojte štvorec ABCD tak, aby bod A ležal na kružnici k, bod C na priamke p a uhlopriečka BD na priamke u.



Riešenie : Uhlopriečka BD leží na priamke u. Štvorec je osovo súmerný podľa svojich uhlopriečok, preto priamka u bude osou súmernosti, v ktorej sa bod A zobrazí do bodu C. Na nájdenie bodov A, C teda využijeme osovú súmernosť s priamkou o. V tejto súmernosti zobrazíme kružnicu k na k' . Hľadaný bod C leží na priamke p a súčasne na kružnici k' .

7. Na biliardovom stole sú umiestnené v bodoch F, G gule. Nájdite trasu z bodu F do bodu G, ktorú prekoná guľa ak sa odrazí postupne od dvoch susedných hrán stola (dolná a pravá bočná).



Riešenie: Platí, že uhol odrazu sa rovná uhlu odrazu. Využijeme osovú súmernosť, osami súmernosti budú tie hrany stola, od ktorých sa má guľa odraziť. Môžeme F zobrazíť v osovej súmernosti podľa dolnej hrany a G zobrazíť v osovej súmernosti podľa bočnej hrany, tak $F'G'$ je najkratšia trasa.

Iná možnosť (výsledok bude rovnaký) je, že bod F zobrazíme do F' podľa osi - dolnej hrany a následne F' zobrazíme do F'' podľa osi - bočnej hrany a úsečka $F''G$ bude najkratšia trasa.