

VÝROKY

Matematické poznatky formulujeme v podobe výrokov. **Výroky** sú oznamovacie vety, o ktorých má zmysel uvažovať, či sú pravdivé alebo nepravdivé.

Výroky označujeme veľkými písmenami: A, B, C, V, ... Výroku priradíme práve jednu pravdivostnú hodnotu ($P(V)$) pravda/ nepravda.

Pravdivý výrok: „1“ $P(V) = 1$

Nepravdivý výrok: „0“ $P(V) = 0$

Napr. A: „Paríž je hlavným mestom Talianska.“ $P(A) = 0$, výrok A je nepravdivý.

B: „Číslo 110 je deliteľné piatimi.“ $P(B) = 1$, výrok B je pravdivý.

Hypotéza je výrok, ktorého pravdivostnú hodnotu sme doteraz neurčili, alebo zatiaľ nepoznáme. Hypotézu taktiež nazývame domnienka.

Ku každému výroku V možno sformulovať výrok, ktorý popiera pravdivosť tvrdenia obsiahnutého vo výroku V a to napr. formou: „Nie je pravda že V.“ Takýto výrok nazveme **negáciou** výroku V a budeme ho označovať V' .

Pre každý výrok V a jeho negáciu V' platí: $P(V') = 1 - P(V)$

Napr. C: „Praha je hlavné mesto Slovenska.“

$P(C) = 0$

C' : „Nie je pravda, že Praha je hlavné mesto Slovenska.“

$P(C') = 1$

C' : „Praha nie je hlavné mesto Slovenska.“

Axióma je elementárne tvrdenie o vlastnostiach základných pojmov, je to tvrdenie, ktoré považujeme za zrejmé.

Operácie s výrokmi

Z jednoduchých(elementárnych) výrokov môžeme prostredníctvom spojok vytvárať súvetia, ktoré budeme nazývať **zložené výroky**.

Nech A, B sú ľubovoľné dva výroky.

Zložený výrok „A a B“ nazývame **konjunkciou** výrokov A, B a označujeme $A \wedge B$.

Napr. D: „Vonku mrzne a sneží“

Zložený výrok „A alebo B“ nazývame **disjunkciou** (alebo tiež alternatívou) výrokov A, B a označujeme $A \vee B$.

Napr. E: „Desiatu mi chystá mama, alebo si ju kupujem v bufete.“

Zložený výrok „Ak A, tak B“ nazývame **implikáciou** výrokov A, B a označujeme $A \Rightarrow B$.

Napr. F: „Ak vyhrám v lotérii, tak si kúpim auto.“

Zložený výrok „A práve vtedy, keď B“ nazývame **ekvivalenciou** výrokov A, B a označujeme $A \Leftrightarrow B$.

Napr. G: „Do divadla pôjdem práve vtedy, keď si kúpim lístok.“

Pravdivostná hodnota zloženého výroku je jednoznačne určená pravdivosťnými hodnotami elementárnych výrokov, z ktorých je výrok zložený a logickými spojkami, ktoré spájajú elementárne výroky.

Tabuľka s pravdivostnými hodnotami.

P(A)	P(B)	P(A ∧ B)	P(A ∨ B)	P(A ⇒ B)	P(A ⇔ B)
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Konjunkcia je pravdivá iba vtedy, ak sú pravdivé oba výroky A, B.

Disjunkcia je nepravdivá iba vtedy, ak sú nepravdivé oba výroky A, B.

Implikácia je nepravdivá iba vtedy, ak z pravdy vyplýva nepravda.

Ekvivalencia je pravdivá iba vtedy, ak oba výroky A, B majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zložený výrok nazývame **tautológiou**, ak je pravdivý bez ohľadu na PH elementárnych výrokov, z ktorých je zložený. Zložený výrok nazývame **kontradikciou**, ak je nepravdivý bez ohľadu na PH elementárnych výrokov, z ktorých je zložený.

Nech je daný výrok, ktorý je implikáciou $A \Rightarrow B$. **Obmenou implikácie** budeme nazývať výrok $B' \Rightarrow A'$. Obmena implikácie je ekvivalentným výrokom k pôvodnej implikácii a má rovnakú PH ako pôvodná implikácia. Pozor, výrok v tvare $B \Rightarrow A$ budeme nazývať **obrátená implikácia** a tento výrok nie je ekvivalentný s pôvodným výrokom.

Napr. výrok H: „Ak vonku prší, do školy ma vezie otec autom.“

Obmena výroku H: „Ak ma do školy nevezie otec autom, tak vonku neprší.“

Obrátená implikácia k H: „Ak ma do školy vezie otec autom, tak vonku prší.“

Negácia zložených výrokov – De Morganove pravidlá:

$$(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$$

$$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow (A \wedge B')$$

$$(A \vee B)' \Leftrightarrow (A' \wedge B')$$

$$(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow [(A \wedge B') \vee (B \wedge A')]$$

Príklady: J: „Vonku padá sneh a je poľadovica.“

J': „Vonku nepadá sneh alebo nie je poľadovica.“

K: „Ráno raňajkujem alebo si chystám desiatu.“

K': „Ráno neraňajkujem a nechystám si desiatu.“

L: „Ak vodič v aute zle vidí cez predné sklo, tak pustí stierače.“

L: „Vodič v aute zle vidí cez predné sklo a nepustí stierače.“

M: „Ak mám z chémie veľa vymeškaných hodín, alebo málo známok, tak robím z chémie komisionálne skúšky.“ $(A \vee B) \Rightarrow C$

M': „Z chémie mám veľa vymeškaných hodín, alebo málo známok a nerobím z chémie komisionálne skúšky.“ $(A \vee B) \wedge C'$

N: „Ak vonku prší, tak si beriem dáždnik, alebo si obliekam pršiplášť.“

$$A \Rightarrow (B \vee C)$$

N': „Vonku prší a neberiem si dáždnik ani si neobliekam pršiplášť.“

$$A \wedge (B' \wedge C')$$

Výrokovou formou $V(x)$ s premennou x nazývame takú oznamovaciu vetu, ktorá obsahuje premennú x , sama nie je výrokom, ale po dosadení konkrétnej hodnoty za premennú x sa výrokom stáva. Množinu hodnôt x , ktorých dosadením do $V(x)$ vznikne pravdivý výrok nazývame obor pravdivosti výrokovej formy $V(x)$.

Napr. $V(n)$: n je číslo párne. ... toto tvrdenie nie je výrokom.

Ak za n dosadíme konkrétnu hodnotu, napr. $n=8$, tak vznikne pravdivý výrok:
„Číslo 8 je párne.“

Kvantifikované výroky – výroky, v ktorých tvrdíme, že existuje objekt danej vlastnosti, prípadne vyslovujeme tvrdenie pre všetky objekty množiny. Pri zápise týchto výrokov používame kvantifikátory

existenčný kvantifikátor $\exists$... čítame „existuje“

všeobecný kvantifikátor $\forall$... čítame „pre všetky“, resp. „pre každé“

Negácia kvantifikovaných výrokov

$$(\forall x; V(x))' \Leftrightarrow \exists x; V'(x) \qquad (\exists x; V(x))' \Leftrightarrow \forall x; V'(x)$$

Napr. O: $\exists n \in \mathbb{N}; n^2 > 100$... Existuje prirodzené číslo n , pre ktoré je jeho 2. mocnina $>$ ako 100

$$O': \forall n \in \mathbb{N}; n^2 \leq 100$$

$$P: \forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0 \quad \dots \text{Pre každé reálne číslo } x \text{ platí } x^2 \geq 0$$

$$P': \exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0$$

Q: „Existuje nekonvexný štvoruholník.“

Q': „Všetky štvoruholníky sú konvexné.“

R: „Súčet vnútorných uhlov každého trojuholníka je 180° .“

R': „Existuje trojuholník, ktorého súčet vnútorných uhlov je iný ako 180° .“

Existujú ďalšie kvantifikované výroky, v ktorých sa objavujú slová: aspoň, najviac, najmenej, viac, menej, práve toľko.

Napr. S: V triede je viac ako 5 okien.

S': Nie je pravda, že v triede je viac ako 5 okien.

S': V triede je najviac 5 okien.

T: Do ďalšieho kola súťaže postúpia najviac traja súťažiaci.

T': Do ďalšieho kola súťaže postúpia viac ako traja súťažiaci.

U: Dnes z fyziky odpovedali práve štyria žiaci.

U': Dnes z fyziky odpovedali menej ako štyria alebo viac ako štyria žiaci.

V: 100 metrov zabehnem za menej ako 16 sekúnd.

V': 100 metrov zabehnem za najmenej 16 sekúnd. (za 16 alebo viac sekúnd)

Príklad

Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt zistíte, či výrok $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B')$ je tautológiu.

A	B	$A \wedge B$	B'	$A \vee B'$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B')$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1

Zadaný výrok je tautológiou.

Príklad

Vytvorte tabuľku pravdivostných hodnôt pre výrok $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \vee A)'$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$C \vee A'$	$(C \vee A)'$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \vee A)'$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0

Príklad

Dané sú výroky A, B, C, D. Určte $A \Rightarrow B'$, $A' \wedge B'$, $(A' \vee B) \Rightarrow C$, $C \Leftrightarrow B$, $A \wedge B' \wedge C'$

A: Nemrzne

B: Je poľadovica.

C: Posypujú cesty.

$A \Rightarrow B$: Ak nemrzne, tak je poľadovica.

$A' \wedge B'$: Mrzne a nie je poľadovica.

$(A' \vee B) \Rightarrow C$: Ak mrzne alebo je poľadovica, tak posypujú cesty.

Obmena k $(A' \vee B) \Rightarrow C$: Ak neposypujú cesty, tak nemrzne a nie je poľadovica.

$C \Leftrightarrow B$: Cesty posypujú práve vtedy, keď je poľadovica.

$A \wedge B' \wedge C'$: Nemrzne a nie je poľadovica a neposypujú cesty.