

Polynomicke funkcia

Def.: Funkciu danú predpisom $f : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $a_n, \dots, a_1, a_0 \in R$ a $a_n \neq 0$ nazývame **polynomicke funkcia n-tého stupňa**.

Ak $n = 1$, tak ide o polynomicke funkciu 1. stupňa, taktiež nazývanú lineárna funkcia.

$$\text{Napri. } f : y = 3x - 2$$

Ak $n = 2$, tak ide o polynomicke funkciu 2. stupňa, taktiež nazývanú kvadraticke funkcia.

$$\text{Napri. } f : y = -x^2 + x - 2$$

Ak $n = 3$, tak ide o polynomicke funkciu 3. stupňa, taktiež nazývanú kubické funkcia.

$$\text{Napri. } f : y = x^3 - 5x + 1$$

Ak $n = 4$, tak ide o polynomicke funkciu 4. stupňa. Napri. $f : y = -2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2$

Vlastnosti polynomickej funkcie

$$D(f) = R, f \text{ je spojitá}$$

Ak n je nepárne, tak funkcia f je neohraničená.

Ak n je párne, tak pre $a_n > 0$ je funkcia zdola ohraničená, pre $a_n < 0$ je funkcia ohraničená zhora.

Polynomicke funkcia n -tého stupňa má najviac n nulových bodov, t.j. spoločných bodov grafu polynomickej funkcie a osi x -ovej.

Nájsť nulové body polynomickej funkcie znamená riešiť algebraickú rovnicu $f(x) = 0$.

Ak x_0 je nulové miesto polynomickej funkcie f n -tého stupňa (alebo koreňom príslušnej algebraickej rovnice), potom funkciu f je možné zapísať v tvare $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, kde g je polynomicke funkcia stupňa $n-1$.

Dvojčlen $x - x_0$ nazývame koreňový činiteľ.

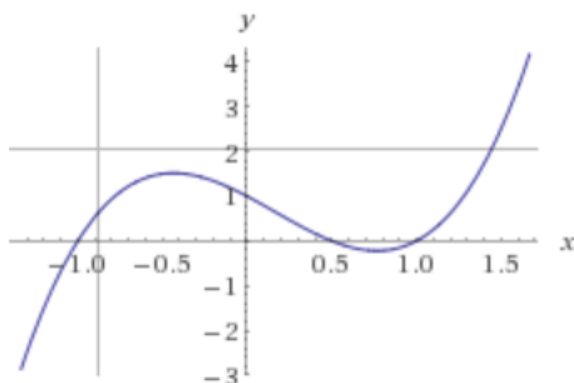
Príklad 1: Určte nulové body funkcie $f : y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ a načrtnite jej graf.

Riešenie : Polynóm $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ rozložíme na súčin pomocou algebraických úprav.

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 2x + 1 &= (2x^3 - 2x) + (-x^2 + 1) = 2x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(2x - 1) = (x - 1)(x + 1)(2x - 1) \end{aligned}$$

Odtiaľ získame nulové body : $+1; -1; \frac{1}{2}$

Graf :



Pre domáce štúdium odporúčam stránku www.wolframalpha.com

Do vstupného poľa stačí zadať polynóm v správnom tvare, pre danú funkciu to bude zápis v tvare :

$2x^3 - x^2 - 2x + 1$ Program vám vykreslí graf, rozloží polynóm na súčin, určí nulové body.

Príklad 2: Daná je funkcia $f : y = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Určte nulové body a načtnite graf funkcie, ak vieme, že $f(2) = 0$.

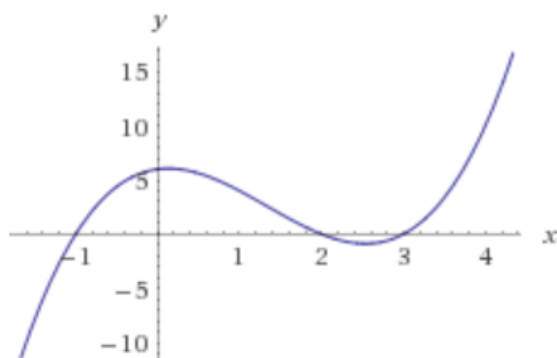
Riešenie: Ak je funkčná hodnota v bode 2 rovná 0, znamená to, že $x=2$ je nulovým bodom a výraz $x-2$ je koreňovým činiteľom. Ak chceme funkciu rozložiť na súčin, použijeme delenie polynómov.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 0 - 2x^2 + x + 6 \\ -(-2x^2 + 4x) \\ \hline 0 - 3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Čiže } x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$$

Kvadratický dvojčlen rozložíme na súčin už známymi metódami. Nulové body funkcie sú : -1 ; 2 ; 3

Graf funkcie:



Príklad 3: Daná je funkcia $f : y = -x^4 + ax^2 + 2x + b$. Určte koeficienty a, b , ak nulové body funkcie sú 0 a 2. Načtnite graf funkcie.

Riešenie : Ak $x=0$ je nulovým bodom, tak platí $f(0) = 0$, čiže $-0^4 + a \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + b = 0$

Ak $x=2$ je nulovým bodom, tak platí $f(2) = 0$, čiže $-2^4 + a \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + b = 0$

Riešime sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Z prvej rovnice zistíme, že $b=0$, upravíme 2. rovnice : $-16 + 4a + 4 + b = 0 \Rightarrow 4a = -b + 12 \Rightarrow a = 3$.

Naša funkcia má predpis : $f : y = -x^4 + 3x^2 + 2x$ a má nulové body : 0; 2.

Pri rozklade na súčin si pomôžeme postupným delením koreňovými činiteľmi.

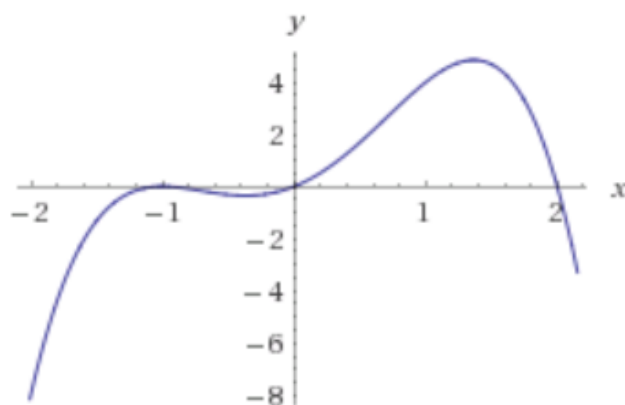
$$(-x^4 + 3x^2 + 2x) : x = -x^3 + 3x + 2$$

$$(-x^3 + 3x + 2) : (x - 2) = -x^2 - 2x - 1$$

$$-x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x + 1)^2$$

Rozklad na koreňové činitele je $(-x^4 + 3x^2 + 2x) = -x(x - 2)(x + 1)^2$

Graf:



Neriešené príklady

1. Určte nulové body a načrtnite graf funkcie

$$f_1 : y = 2x^3 - 5x + 3$$

$$f_2 : y = -x^4 - x^3 + x + 1$$

$$f_3 : y = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$$

$$f_4 : y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \text{ ak } f(-2) = 0 \quad f_5 : y = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24, \text{ ak NB sú } 1 \text{ a } 3$$

2. Napíšte predpis polynomickej funkcie 3. stupňa, ak viete, že daná funkcia má nulové body 2 a -2, načrtnite jej graf.

3. Určte hodnoty koeficientov a, b funkcie $h : y = x^3 + ax^2 - 2x + b$, ak funkcia má NB v bode $x=1$ a $h(-2) = 9$.