

Pravdepodobnosť

Náhodný pokus – pokus, ktorý je možné ľubovoľne veľa krát opakovať, pričom výsledok konkrétneho pokusu nie je deterministicky daný (nevieme dopredu povedať, aký bude výsledok pokusu).

Elementárny jav – každý možný výsledok realizácie náhodného pokusu.

Náhodný jav – ľubovoľná množina elementárnych javov. (označenie náh.javov - A, B, C ...)

Klasická definícia pravdepodobnosti

Nech náhodný pokus spĺňa predpoklady :

- počet všetkých výsledkov pokusu je konečný
- všetky výsledky pokusu sú rovnako možné
- žiadne dva výsledky pokusu nemôžu nastať súčasne

Pravdepodobnosť javu A je číslo $P(A) = \frac{m}{n}$, kde n je počet všetkých možných výsledkov náhodného pokusu a m je počet všetkých priaznivých výsledkov pokusu, t.j. výsledkov, pri ktorých nastal jav A.

Štatistická definícia pravdepodobnosti

$P_n(A) = \frac{n(A)}{n}$... relatívna početnosť udalosti A pri n -násobnej nezávislej realizácii daného pokusu,

$n(A)$ - absolútna početnosť javu A

Pre ľubovoľný náhodný jav A platí $P(A) \in \langle 0; 1 \rangle$.

Jav nemožný – jav, ktorý pri danom pokuse nikdy nemôže nastať ... $P(A) = 0$

Jav istý – jav, ktorý pri danom pokuse nastane stále ... $P(A) = 1$

A je časťou javu B, ak jav A má za následok jav B, čiže jav B nastane vždy, keď nastane jav A. ($A \subset B$)

Javy A, B sa rovnajú (sú rovnocenné), ak jav A je časťou javu B a súčasne jav B je časťou javu A. Jav A má za následok jav B a jav B má za následok jav A. Zapišeme $A=B$.

Zjednotenie javov A, B – jav, ktorý nastane vtedy, ak nastane aspoň jeden z javov A, B

Prienik javov A, B – jav, ktorý nastane pri súčasnom nastatí javu A aj javu B

Nezlúčiteľné javy – prienik javov je jav nemožný. Nezlúčiteľné javy nemôžu nastať súčasne pri jednom pokuse.

Jav A' opačný k javu A nastane práve vtedy, keď jav A nenastane. ... $P(A') = 1 - P(A)$

Javy A, B sa nazývajú **nezávislé** práve vtedy, keď platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti

Nech náhodný pokus sa skladá z n nezávislých čiastkových pokusov, z ktorých každý má dva možné výsledky :
úspech nastane s pravdepodobnosťou p
neúspech nastane s pravdepodobnosťou $1-p$

Pravdepodobnosť, že práve k čiastkových výsledkov sa skončí úspechom je

$$P_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Podmienená pravdepodobnosť javu A za podmienky nastatia javu B je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{pre } P(B) > 0$$

Príklady:

- Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma kockami – modrou a červenou
 - padne na oboch kockách číslo 1
 - padne na oboch kockách rovnaké číslo
 - padne na oboch kockách padne párne číslo
 - bude súčet čísel na kockách rovný hodnote 10
 - bude súčet čísel na kockách väčší ako 9
- K dispozícii máme balíček sedmových kariet. Z balíčka vytiahneme naraz dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme
 - dve esá
 - dve guľové karty
 - jedného kráľa a jednu dámu
 - dve karty rovnakej farby.
- Z čísel 1 až 50 náhodne vyberieme jedno číslo. S akou pravdepodobnosťou je to číslo
 - deliteľné tromi
 - deliteľné ôsmimi
 - deliteľné číslom 6 a 8
 - deliteľné číslom 6 alebo 8
- V triede je 10 dievčat a 16 chlapcov. Aká je pravdepodobnosť, že
 - učiteľ vyvolá konkrétneho žiaka XY.
 - učiteľ nevyvolá žiaka XY
 - učiteľ vyvolá odpovedať chlapca
- Kocku s hranou dĺžky 4cm ofarbíme na modro, následne kocku rozrežeme na malé kocky s dĺžkou hrany 1cm.
 - Kocky zamiešame a náhodne jednu vyberieme. Aká je pravdepodobnosť, že vybratá kocka
 - má ofarbenú práve jednu stenu
 - má zafarbenú aspoň jednu stenu
 - má ofarbené všetky steny
 - Kocky zamiešame a náhodne vyberieme dve. Aká je pravdepodobnosť, že vybrané kocky
 - obe majú neofarbené všetky steny
 - obe majú zafarbenú aspoň jednu stenu
 - obe kocky sú rovnakého typu
- Náhodne vyberieme 4-ciferné číslo, aká je pravdepodobnosť, že v jeho zápise sa vyskytuje číslica 8
 - práve raz
 - aspoň raz
 - práve 2-krát
 - na 2. mieste

7. Vo výrobnjej hale pracujú tri stroje. Pravdepodobnosť, že počas pracovnej zmeny nastane porucha na prvom stroji je 0,1, na druhom 0,2 a na treťom 0,25. Aká je pravdepodobnosť, že počas zmeny
- a) budú pracovať všetky stroje
 - b) sa pokazí práve jeden stroj
 - c) bude pracovať aspoň jeden stroj
8. Dvaja futbalisti strieľajú pokutové kopy. Pravdepodobnosť, že Adam dá gól je 0,7, pravdepodobnosť, že gól dá Boris je 0,8. Každý z nich strieľa raz na bránu. Aká je pravdepodobnosť, že
- a) aspoň jeden z nich dá gól
 - b) ani jeden z nich nedá gól
 - c) jeden dá gól, druhý nedá
9. V obchode majú z jedného typu tovaru 100 kusov, pričom medzi nimi sú 4 nepodarky. Aká je pravdepodobnosť, že pri výbere troch kusov výrobkov
- a) vyberieme práve jeden nepodarok
 - b) vyberieme aspoň jeden nepodarok
 - c) nevyberieme nepodarok
10. Vo vrecúšku je 5 bielych guľičiek, 3 červené a 2 čierne guľičky.
- I. Aká je pravdepodobnosť, že pri výbere dvoch guľičiek naraz
- a) budú obe guľičky biele
 - b) bude jedna guľička biela a jedna čierna
 - c) budú obe guľičky rôznej farby
- II. Aká je pravdepodobnosť, že ak vyberieme prvú guľičku bielu, tak druhá
- a) budú červená
 - b) nebude biela
- III. Aká je pravdepodobnosť, že pri postupnom vyberaní guľičiek budú obe rovnaké?
11. Hádzeme trikrát mincou. S rovnakou pravdepodobnosťou môže padnúť hlava alebo znak. Aká je pravdepodobnosť, že
- a) padne práve raz hlava
 - b) padne viackrát hlava ako znak
 - c) pri každom hode padne rovnaký symbol?
12. Hádzeme kockou. Aká je pravdepodobnosť, že
- a) pri troch hodoch padne vždy nepárne číslo
 - b) pri 10-tich hodoch padne päťka trikrát
 - c) pri piatich hodoch padne šestka aspoň raz
13. Internetový obchod zistil, že pri expedícii zásielok zákazníkom je pravdepodobnosť poškodenia zásielky 20%. Aká je pravdepodobnosť, že
- a) pri expedícii piatich zásielok sa ani jedna nepoškodí
 - b) pri expedícii 30-tich zásielok budú poškodené najviac 3 zásielky.

BONUS

14. Letecká spoločnosť vie, že priemerne 14% rezervovaných leteniek býva vrátených. Z toho dôvodu vydá viac rezervácií ako je miest v lietadle. Na jeden z letov vydala 280 rezervácií, pričom miest v lietadle je 235. Určte pravdepodobnosť, že
- a) všetci cestujúci budú mať miesto
 - b) jeden cestujúci nebude mať miesto