

Stereometria – Telesá

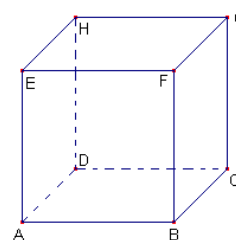
Telesom budeme rozumieť trojrozmerný ohraničený geometrický útvar. Spomedzi telies vieme vyselektovať skupinu telies, o ktorých budeme hovoriť ako o hranatých telesách, resp. mnohostenoch. Mnohosten je teleso ohraničené rovinnými n -uholníkmi. Prieniky susedných stien telesa sa nazývajú **hrany**.

Ďalšiu veľkú skupinu telies tvoria rotačné telesá, ktoré vznikajú rotáciou uzavretej rovinatej oblasti okolo pevnej priamky.

Hranaté telesá

Kocka

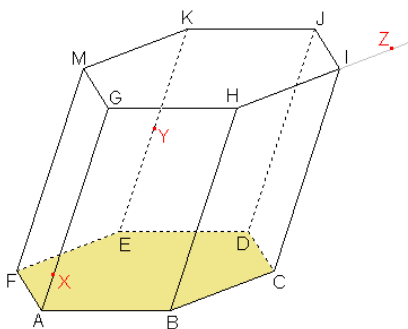
Jedným z najjednoduchších telies je **kocka**. Je ohraničená šiestimi stenami, ktorými sú navzájom zhodné štvorce. Kocka má 8 vrcholov a 12 hrán, sú to strany stien. Na obrázku je znázornená kocka ABCDEFGH.



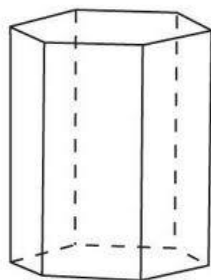
Obr.1 Kocka

Hranol

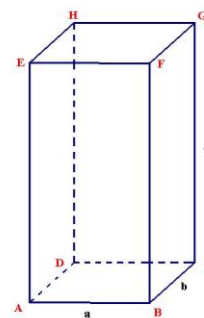
n-boký hranol je teleso, ktoré má dve rovnobežné steny – zhodné n -uholníky, ktoré nazývame **podstavy**. Zvyšné steny, ktorých je n , nazývame **bočné steny**, spolu tvoria **plášť** hranola. Všetky bočné steny hranola sú rovnobežníky, u **kolmého hranola** sú to obdĺžniky. Hrany hranola rozdeľujeme na podstavné hrany, sú stranami podstavných n -uholníkov a bočné hrany. n -boký hranol má $2n$ vrcholov, $2n$ podstavných hrán a n bočných hrán



Obr.2 Šikmý hranol



Obr.3 Pravidelný 6-boký hranol

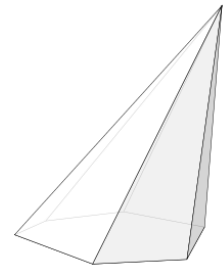


Obr.4 Kváder

Dôležité sú niektoré špeciálne typy hranolov. **Pravidelný n-boký hranol** je kolmý hranol, ktorého podstavy sú pravidelné n -uholníky. **Rovnobežnosť** je štvorboký hranol, ktorého protíahlé steny sú rovnobežné. **Kváder** je kolmý hranol, ktorého podstavy sú pravouholníky.

Ihlan

n-boký ihlan je teleso, ktoré má jednu významnú stenu – **podstavu**, ktorou je n -uholník a jeden významný vrchol nazývaný **hlavný vrchol**. Všetkých n ostatných stien ihlana – **bočné steny** sú trojuholníky, ktorých jedným vrcholom je hlavný vrchol ihlana a ostatné dva vrcholy sú vrcholy jeho podstavy. Hrany podstavy ihlana sa nazývajú **podstavné hrany** a je ich n . Ostatné hrany sa nazývajú **bočné hrany** a tiež ich je n . Bočné hrany ihlana spájajú vrcholy podstavy s hlavným vrcholom.

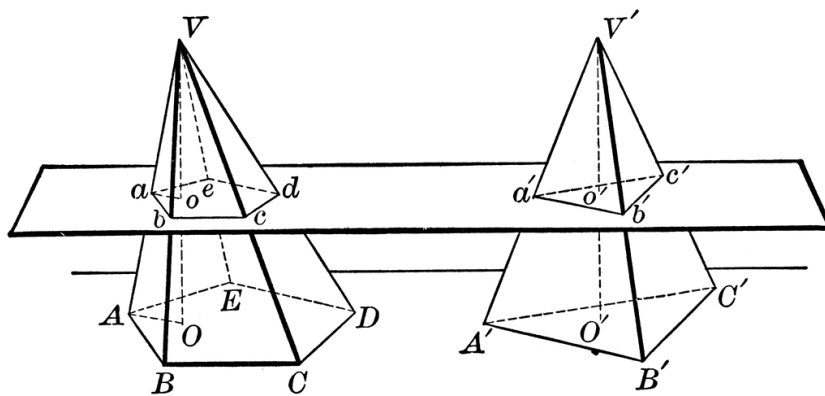


Obr.5 Ihlan

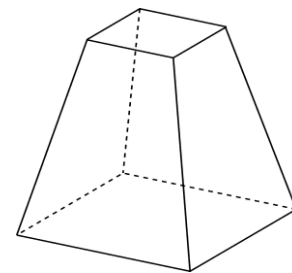
Pravidelný n-boký ihlan je ihlan, ktorého podstavou je pravidelný n -uholník a bočné steny tvoria rovnoramenné trojuholníky. Priamka prechádzajúca stredom podstavy a hlavným vrcholom ihlana je kolmá na rovinu podstavy.

Zrezaný ihlan

Zrezaný ihlan je prienik ihlana s polpriestorom αA , ktorého hraničná rovina α je rovnobežná s podstavou ihlana, pričom A je niektorý vrchol podstavy ihlana a hlavný vrchol V ihlana neleží v polpriestore αA .



Obr.6 Ako vzniká zrezaný ihlan



Obr.7 Zrezaný ihlan

Zrezaný ihlan má dve dôležité steny, ktoré nazývame **podstavy**. Jedna z nich je podstavou pôvodného ihlana a druhá je prienikom ihlana s rovinou α . Podstavy zrezaného ihlana ležia v dvoch navzájom rovnobežných rovinách, ktorých vzdialenosť sa nazýva **výška zrezaného ihlana**. Ostatné steny zrezaného ihlana sú lichobežníky a nazývame ich **bočné steny**.

Eulerova veta

Určuje vzťah medzi počtom vrcholov (v), hrán (h) a stien (s) pre konvexné mnohosteny.

Pre každý konvexný mnohosten platí

$$v + s = h + 2$$

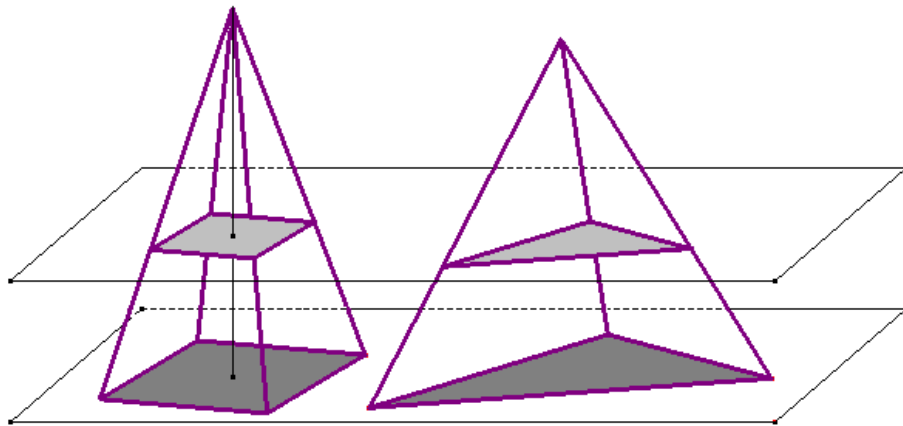
Objem mnohostenov

Určovanie objemov telies je jedným z najčastejších a najstarších použití geometrie v praxi. Vzorec pre výpočet objemu zrezaného pravidelného štvorbokého ihlana bol v Egypte známy už v 17. stor. pred n.l. Pomocou objemu telies môžeme napr. určiť skladovaciu kapacitu rôznych priestorov alebo nádob, hmotnosť predmetov a mnohé ďalšie údaje.

Objem telies má tieto vlastnosti :

1. Zhodné telesá majú rovnaké objemy.
2. Ak teleso $T_1 \subset T_2$, tak $V_1 \leq V_2$.
3. Ak teleso T je zjednotením dvoch telies T_1 a T_2 , ktoré nemajú spoločné vnútorné body, tak objem telesa T je súčtom objemov telies T_1 a T_2 ($V = V_1 + V_2$)
4. **Objem kolmého hranola** je súčinom obsahu podstavy a výšky, t.j. $V = S_p \cdot v$
5. **Cavalieriho princíp:** Ak pre telesá T_1 a T_2 existuje taká rovina ρ , že každá rovina s ňou rovnobežná pretína telesá T_1 a T_2 v útvaroch s rovnakým obsahom, tak telesá majú rovnaký objem ($V_1 = V_2$).

Cavalieriho princíp znázorňuje nasledujúci obrázok.



Obr.8 Cavalieriho princíp

Objemy zložitejších telies je možné určovať pomocou jeho rozkladu na jednoduchšie telesá, prípadne doplnením telesa na teleso, ktorého objem vieme určiť.

Objem ihlana s obsahom podstavy S_p a výškou v určíme podľa vzťahu

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

Objem zrezaného ihlana, ktorého podstavy majú obsahy S_{p1} a S_{p2} a výškou v určíme podľa vzťahu

$$V = \frac{1}{3} v \left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} S_{p2}} + S_{p2} \right)$$

Povrch mnohostenov

Povrch telesa je definovaný ako miera jeho hranice. Hranica každého mnohostena sa skladá z konečného počtu Zjednodušene povedané, povrch telesa je súčtom obsahov všetkých jeho stien (plôch, ktoré teleso ohraničujú). Zjednotenie všetkých bočných stien hranola, ihlana resp. zrezaného ihlana sa nazýva **plášť**.

Povrch hranola s obsahom podstavy S_p a obsahom plášťa Q určíme podľa vzťahu

$$S = 2S_p + Q$$

Povrch ihlana s obsahom podstavy S_p a obsahom plášťa Q určíme podľa vzťahu

$$S = S_p + Q$$

Povrch zrezaného ihlana, ktorého podstavy majú obsahy S_{p1} a S_{p2} a obsahom plášťa Q určíme podľa vzťahu

$$S = S_{p1} + S_{p2} + Q$$